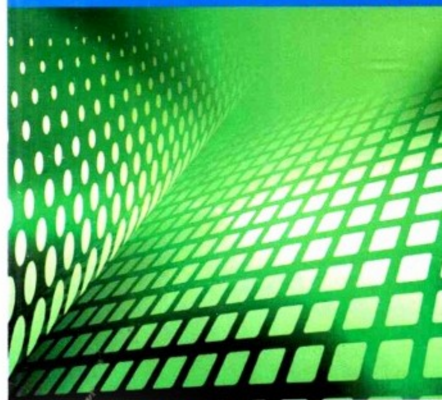
学者书屋系列

非线性数学物理方程的精确解

杜兴华◎著





HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

选题策划/罗东明
责任编辑/张忠远 张志雯
封面设计/语墨弘源



上架建议：理工类 数学

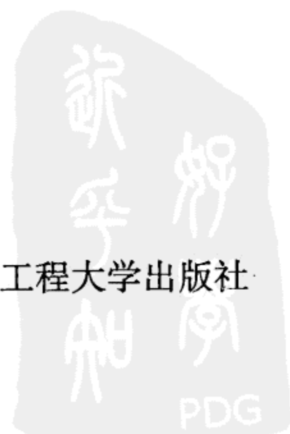
ISBN 978-7-81133-774-7

定价:18.80元

学者书屋

非线性数学物理方程的精确解

杜兴华　著



哈尔滨工程大学出版社

内容提要

本书系统介绍了求非线性数学物理方程精确解的两种方法，即多项式完全判别系统法和试探方程法。作者利用这两种方法求解了许多非线性数学物理方程的大量精确解。本书还在广泛研究射影 Riccati 方程方法的基础上，以多项式型的非线性微分方程为例，给出了射影 Riccati 方程方法的统一格式，指出了该方法的局限性，并用此法求出了若干非线性数学物理方程的精确解。

本书可作为数学、力学、物理专业的研究生用教材，也可供非线性科学领域的研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性数学物理方程的精确解/杜兴华著. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社，2010.5

ISBN 978-7-81133-774-7

Ⅰ.①非… Ⅱ.①杜… Ⅲ.①非线性-数学物理方程 Ⅳ.①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 085312 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂印刷
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 6
字　　数 140 千字
版　　次 2010 年 5 月第 1 版
印　　次 2010 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 18.80 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn



前　　言

寻求非线性数学物理方程的精确解是非线性科学研究的核心问题之一，可是由于非线性方程的复杂性，不可能有统一的求解方法，但经过众多科学家的努力，人们目前已经建立和发展了许多各具特色的构造精确解的有效方法，如反散射方法[1]、Backlunud 法[2,3,4]，Darboux 变换法[5,6]、Hirota 双线性法[1]、延拓法[7,8]、Painleve 分析法[9,10]、Lie 群法[11,12]、Tanh 函数法[13-19]等. 特别是近年来，随着计算机代数理论的发展，人们可以运用 Maple 或 Mathematica 等程序便捷地求解复杂、冗长的非线性代数方程组，从而为求解非线性数学物理方程的精确解提供了有力的工具. 尽管如此，仍有大量的具有实际背景的非线性数学物理方程，需要新的方法才能求出其精确解.

对于非线性数学物理方程，为求它们的精确行波解，首先要把这些方程约化成非线性常微分方程. 在很多情形下，这些非线性常微分方程是多项式形式. 对于多项式型的非线性微分方程，可以分为两类：一类是秩齐次的，另一类是秩非齐次的. 对于不是多项式形式的非线性方程，大多可以通过变换化成多项式形式，因此研究这些方程是具有比较普遍意义的. 为求这些方程的解，刘成仕提出了两个非常有效的方法，一个就是对于能直接化成初等积分形式的方程，利用多项式的完全判别系统，求出原方程的所有可能的单行波解. 在这本书里，我们将这一方法统称为多项式完全判别系统法[20-26,38,63]. 另一个就是试探方程法[27-29,34,77]，这种方法从方程的自身结构着手，对非线性常微分算子进行因子分解，即使方程本身不可积，也可以分出一个可积的子方程，这样就得到了它的部分精确解，这在求解观念上是一个大的改变. 同时，这一方法有着深刻的理论基础. 随着这一方法的不断发展，它不仅适用于许多秩齐次方程，对于许多秩非齐次方程也适用. 利用这两种新方法，不仅可以求出许多非线性数学物理方程的精确解，还可以求出许多由其他方法得不到的新解[24,25,28]，并且这两种方法更直接，更简捷. 目前还没有专门介绍这两种研究方法的书籍，对于欲了解、掌握该研究方法的人们只能从零散的有关文献中去寻找学习，这给学习者和研究者带来很大不便. 因此，本书系统完整地介绍了这两种方法，并利用这两种方法求解许多非线性数学物理方程的精确解，使读者通过本书能完全、系统、有效地掌握该方法，以适用于今后的非线性研究.

本书第一部分介绍多项式完全判别系统法. 这一部分共分 5 章. 第 1 章首先简单介绍了多项式完全判别系统法，并且给出了二阶至五阶多项式的完全判别系统. 第 2 章具体介绍二阶多项式完全判别系统法，利用该方法求出了 2+1 维广义 Hirota 方程和 Maccari's 方程组的精确解，其中包括许多新解. 第 3 章具体介绍三阶多项式完全判别系统法，利用该方法求出了 2+1 维 Zakharov-Kuznetsov 方程、Kadmtsev-Petviashvili 方程、2+1 维 Bousenisq 方程、正则长波方程和 Pochharmer-Chree 方程的精确解，其他包括许多新解. 第 4 章具体介绍四阶多项式完全判别系统法，利用该方法求出了 Medium Equal Width 方程、正 Gardner 方程、非线性耦合标量场方程的精确解，其中包括大量新解. 第 5 章具体介绍五阶多项式完全判别系统法，利用该方法求出了带有四阶非线性项的 $D+1$ 维 Klein-Gordon 方程、带有任意阶非线性项的混合 KdV 方程以及不带耗散项的广义 KP 方程的精确解，其中包括大量新解. 事实上，所求这些方程的精确解，都是原方程的所有单行波解的分类，这些完备的结果用其他展开方法是不可能得

到的.

第二部分介绍试探方程法. 这一部分共分7章，详细介绍了多项式试探方程法、有理试探方程法和无理试探方程法. 前4章分别针对秩齐次和秩非齐次方程给出了四种多项式试探方程法,并且作为应用，求出了1+1维 Camassa-Holm 方程、Tzizeica-Dodd-Bullough 方程等11个非线性数学物理方程的精确解,其中包括很多新解. 第5章和第6章分别给出了有理试探方程法和无理试探方程法，并分别用这两种方法求出了2+1维 KdV-Burgers 方程和 RLW-Burgers 方程、耗散双 Sine-Gordon 方程的精确解. 第7章给出了推广的无理试探方程法，作为更一般的方法,能求解更多的非线性数学物理方程. 作为应用求出了 Fujimoto-Watanabe 方程的精确解.

多年来，人们不断改进已有的求解方法,并且努力寻找各种新方法，使得过去一些难以求解的方程得到解决，而且不断发现许多非线性数学物理方程有重要意义的新解. 比如射影 Riccati 方程方法是构造非线性数学物理方程精确解的一种有效方法，人们多年来不断研究改进这个方法，并且利用各种 Riccati 方程发现其他新方法. 但是该方法的理论基础往往被忽略.

因此本书第三部分就是对射影 Riccati 方程方法进行理论研究. 这一部分共分2章. 第1章在广泛研究射影 Riccati 方程方法的基础上，以多项式型的非线性微分方程为例，给出了射影 Riccati 方程方法的统一格式. 同时研究了这个方法的数学基础，得到该方法的主要结论，指出了射影 Riccati 方程方法的局限性. 第2章作为这个方法的应用，求出了 Fitzhugh-Nagumo 方程、BBM-Burgers 方程和广义 KPP 方程的精确解.

本书求解的非线性数学物理方程，主要是作者近年将本书所述方法在众多非线性数学物理方程应用的一部分，有些是已经发表了的，有些是新的结果，但为方便读者,力求内容详细全面,还是将其写在此书中.

本书在编写与出版过程中,得到了刘成仕教授的建议与帮助,得到了哈尔滨工程大学出版社的大力支持,在此一并表示感谢。

作　者

2010年4月



目　　录

第1编　多项式完全判别系统法及其应用

第2编　试探方程法及其应用

第 3 编 射影 Riccati 方程方法的统一格式及其应用

第1编　多项式完全判别系统法及其应用

在这一部分,利用多项式的完全判别系统法[20-26,38,63],来寻求若干非线性数学物理方程的所有单行波解的分类.

第1章　多项式完全判别系统法概述

为寻求某些非线性数学物理方程的精确行波解,我们常常将这些方程约化成如下常微分方程

$$u'(\xi) = G(u,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \tag{1.1.1}$$

其中,$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 是参数,那么方程(1.1.1)可写成积分形式

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{\mathrm{d}u}{G(u,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)} \tag{1.1.2}$$

因此,为求解方程(1.1.1),我们只需求解积分式(1.1.2).根据不同的参数,我们可以给出积分式(1.1.2)的不同解.但是确定参数的范围是相当困难的.因此,最重要的步骤就是确定参数的范围及相应的积分解.刘成仕首次应用一种称作多项式完全判别系统[30,22,21,26]的新的数学工具很好地解决了这个问题.利用多项式的完全判别系统,我们可以给出积分式(1.1.2)的所有解的分类,从而求出原非线性数学物理方程相应的所有单行波解的分类.为明确起见,这里把由求解一个积分而得到的方程的解叫做原子解[24].在这本书里,我们仅考虑原子解.对于许多非线性数学物理方程,它们的精确行波解都是某些形如积分式(1.1.2)的解,其中$G(u,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$常常和一些多项式有关.通过利用多项式完全判别系统求解积分式(1.1.2)就可以求出这些数学物理方程的精确解,它们是该方程所有单行波解的分类.这就是所谓的多项式完全判别系统法.

多项式的完全判别系统是二阶多项式$f(x)=ax^2+bx+c$的判别式$\Delta=b^2-4ac$的自然推广.但是对于高阶多项式,要得到相应的完全判别系统却非常困难.1996年,杨路等[30]解决了这个问题.在计算机代数的帮助下,他们给出了计算多项式完全判别系统的算法.比如三阶多项式$F(w)=w^3+d_2w^2+d_1w+d_0$,它的完全判别系统是

$$\begin{cases}\Delta = -27\left(\dfrac{2d_2^3}{27}+d_0-\dfrac{d_1d_0}{3}\right)^2-4\left(d_1-\dfrac{d_2^2}{3}\right)^3\\ D_1 = d_1-\dfrac{d_2^2}{3}\end{cases} \tag{1.1.3}$$

四阶多项式$F(w)=w^4+pw^2+qw+r$的完全判别系统[26]

$$\begin{cases} D_1 = 4 \\ D_2 = -p \\ D_3 = -2p^3 + 8pr - 9q^2 \\ D_4 = -p^3q^2 + 4p^4r + 36pq^2r - 32p^2r^2 - \dfrac{27}{4}q^4 + 64r^3 \\ E_2 = 9p^2 - 32pr \end{cases} \tag{1.1.4}$$

五阶多项式 $F(w) = w^5 + pw^4 + qw^2 + rw + s$ 的完全判别系统[20,24,30]

$$\begin{cases} D_2 = -p \\ D_3 = 40rp - 12p^3 - 45q^2 \\ D_4 = -4p^3q^2 + 12p^4r + 117pq^2r - 88p^2r^2 - 40qsp^2 - 27q^4 + 160r^3 - 300qrs \\ D_5 = -1\,600qsr^3 - 3\,750pqs^3 + 2\,000ps^2r^2 - 4p^3q^2r^2 + 16p^3q^3s - 900rs^2p^3 + \\ \qquad 825p^2q^2s^2 + 144pq^2r^3 + 2\,250rq^2s^2 + 16p^4r^3 + 108p^5s^2 - 128r^4p^2 - \\ \qquad 27r^2q^4 + 108sq^5 + 256r^5 + 3125s^4 - 72rsqp^4 + 560sqr^2p^2 - 630prsq^3 \\ E_2 = 160r^2p^3 + 900q^2r^2 - 48rp^5 + 60rp^2q^2 + 1\,500pqrs + 16q^2p^4 - \\ \qquad 1\,100qsp^3 + 625s^2p^2 - 3\,375sq^3 \\ F_2 = 3q^2 - 8rp \end{cases} \tag{1.1.5}$$

利用这些完全判别系统，我们可以求得许多非线性数学物理方程的所有单行波解的分类，并且可以得到许多其他方法没有得到的新解.



第2章 二阶多项式完全判别系统法及其应用

2.1 二阶多项式完全判别系统法

如果一个非线性数学物理方程,经过行波变换后能够约化成以下常微分形式

$$(u')^2 = au^2 + bu + c \tag{1.2.1}$$

那么,只要我们能给出方程(1.2.1)的所有解的分类,则原非线性数学物理方程的所有单行波解的分类就都能给出.下面便给出方程(1.2.1)的所有解的分类.

首先将式(1.2.1)写成积分形式

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{au^2 + bu + c}} \tag{1.2.2}$$

这里我们记 $F(u) = au^2 + bu + c$,其多项式完全判别系统,也就是所谓的判别式,即 $\Delta = b^2 - 4ac$. 那么积分式(1.2.2)的解有以下三种情形.

情形1:$\Delta = 0$. 此时 $F(u) = 0$ 有一个二重实根,即

$$F(u) = a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2$$

若 $a > 0$,积分式(1.2.2),相应的得到方程(1.2.1)的解为

$$u_1 = \pm\exp[\pm\sqrt{a}(\xi - \xi_0)] - \frac{b}{2a}$$

情形2:$\Delta > 0$. 此时 $F(u) = 0$ 有两个不相等的实根,则

$$F(u) = a\left(u + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

相应的得到积分式(1.2.1)的解为

$$u_2 = \pm\frac{1}{2}e^{\pm\sqrt{a}(\xi-\xi_0)} + \frac{b^2 - 4ac}{8a^2}e^{\mp\sqrt{a}(\xi-\xi_0)} \mp \frac{b}{2a} \quad (a > 0)$$

$$u_3 = -\frac{1}{2a}\{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}\sin[\pm\sqrt{-a}(\xi - \xi_0)] + b\} \quad (a < 0)$$

情形3:$\Delta < 0$. 此时 $F(u) = 0$ 没有实根. 当 $a > 0$ 时,相应的得到积分式(1.2.1)的解依然为

$$u = \pm\frac{1}{2}e^{\pm\sqrt{a}(\xi-\xi_0)} + \frac{b^2 - 4ac}{8a^2}e^{\mp\sqrt{a}(\xi-\xi_0)} \mp \frac{b}{2a}$$

2.2 2+1维广义 Hirota 方程的精确解

考虑2+1维广义 Hirota 方程[31-33,93]

$$iu_t + u_{xy} + iu_{xxx} + uv - i|u|^2u_x = 0 \tag{1.2.3}$$

$$3v_x + (|u|^2)_y = 0 \tag{1.2.4}$$

我们首先作以下变换，$u=\exp(i\theta)U(\xi)$，$v=V(\xi)$，$\theta=px+qy+rt$，以及 $\xi=x+dy+et$，将方程(1.2.3)和方程(1.2.4)变换成如下形式

$$(e+q+pd-3p^2)U'-U^2U'+U'''=0 \tag{1.2.5}$$

$$(p^3-r-pq)U+UV+pU^3+(d-3p)U''=0 \tag{1.2.6}$$

$$V=-\frac{d}{3}U^2+c \tag{1.2.7}$$

其中，c 是积分常数. 对方程(1.2.5)积分一次并把方程(1.2.7)代入式(1.2.6)得

$$(e+q+pd-3p^2)U-\frac{1}{3}U^3+U''=d_0 \tag{1.2.8}$$

$$(p^3-r-pq+c)U+\left(-\frac{d}{3}+p\right)U^3+(d-3p)U''=0 \tag{1.2.9}$$

为了使方程(1.2.8)和方程(1.2.9)相容，我们令

$$d_0=0, c=(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3 \tag{1.2.10}$$

在条件(1.2.10)下，方程(1.2.8)和方程(1.2.9)是同一方程. 积分方程(1.2.8)，相应地有

$$(U')^2=\frac{1}{6}U^4-(e+q+pd-3p^2)U^2+c_1 \tag{1.2.11}$$

其中，c_1 是任意常数. 为了求解方程(1.2.11)，作变换，$w=\frac{1}{\sqrt[4]{6}}U$，$\xi_1=\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi$，使方程(1.2.11)变为

$$w_{\xi_1}^2=w^4+p_1w^2+p_2 \tag{1.2.12}$$

其中，$p_1=-\sqrt{6}(e+q+pd-3p^2)$，$p_2=c_1$.

令 $w^2=\psi$，并将其代入方程(1.2.12)得

$$\psi_{\xi_1}^2=4\psi(\psi^2+p_1\psi+p_2) \tag{1.2.13}$$

再积分方程(1.2.13)，得

$$\int\frac{d\psi}{\sqrt{\psi F(\psi)}}=\pm 2(\xi_1-\xi_0) \tag{1.2.14}$$

其中，$F(\psi)=\psi^2+p_1\psi+p_2$，且 ξ_0 是积分常数. 令 $\Delta=p_1^2-4p_2$ 为二阶多项式 $F(\psi)$ 的判别式，根据 $F(\psi)$ 的根的情况，方程(1.2.14)的解有四种情形.

情形 1：$\Delta=0$. 由于 $\psi>0$，则有

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\int\frac{d\psi}{\left(\psi+\frac{p_1}{2}\right)\sqrt{\psi}} \tag{1.2.15}$$

若 $p_1<0$，则方程(1.2.15)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\sqrt{\frac{2}{-p_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{2\psi}-\sqrt{-p_1}}{\sqrt{2\psi}+\sqrt{-p_1}}\right|$$

相应地，方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=-\frac{p_1}{2}\tanh^2\left[\sqrt{-\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right] \tag{1.2.16}$$

$$\psi=-\frac{p_1}{2}\coth^2\left[\sqrt{-\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right] \tag{1.2.17}$$

若 $p_1>0$，则方程(1.2.15)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=-2\sqrt{\frac{2}{p_1}}\arctan\sqrt{\frac{2\psi}{p_1}}$$

相应地，方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=\frac{p_1}{2}\tan^2\left[\sqrt{\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right] \tag{1.2.18}$$

若 $p_1=0$，则方程(1.2.15)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\frac{-2}{\sqrt{\psi}}$$

相应地，方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=\frac{1}{(\xi_1-\xi_0)^2} \tag{1.2.19}$$

情形2：$\Delta>0,p_2=0$. 由于 $\psi>-p_1$，故方程(1.2.14)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi\sqrt{\psi+p_1}} \tag{1.2.20}$$

根据情形1，方程(1.2.20)的解有如下情况：

若 $p_1>0$，则方程(1.2.20)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\sqrt{\frac{2}{p_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{2(\psi+p_1)}-\sqrt{p_1}}{\sqrt{2(\psi+p_1)}+\sqrt{p_1}}\right|$$

相应地，方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=\frac{p_1}{2}\tanh^2\left[\sqrt{\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right]-p_1 \tag{1.2.21}$$

$$\psi=\frac{p_1}{2}\coth^2\left[\sqrt{\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right]-p_1 \tag{1.2.22}$$

若 $p_1<0$，则方程(1.2.20)变成

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=-2\sqrt{-\frac{2}{p_1}}\arctan\sqrt{\frac{2(\psi+p_1)}{-p_1}}$$

相应地，方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi=-\frac{p_1}{2}\tan^2\left[\sqrt{-\frac{p_1}{2}}(\xi_1-\xi_0)\right]-p_1 \tag{1.2.23}$$

情形3：$\Delta>0,p_2\neq 0$. 假设 $\alpha<\beta<\gamma$，且其中有一个为零，其余两个是 $F(\psi)$ 的两个根. 由于 $\alpha<w<\beta$，作变换 $\psi=\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\varphi$，由方程(1.2.14)有

$$\pm 2(\xi_1-\xi_0)=\frac{2}{\sqrt{\gamma-\alpha}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} \tag{1.2.24}$$

其中，$m^2=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

根据方程(1.2.24)及Jacobi椭圆函数sn的定义，得

$$\mathrm{sn}^2(\pm\sqrt{\gamma-\alpha}(\xi_1-\xi_0),m)=\sin^2\varphi=\frac{\psi-\alpha}{\beta-\alpha} \tag{1.2.25}$$

即得方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi = \alpha + (\beta - \alpha)\mathrm{sn}^2(\sqrt{\gamma - \alpha}(\xi_1 - \xi_0), m) \tag{1.2.26}$$

若 $V > \gamma$,作变换 $\psi = \dfrac{-\beta\sin^2\varphi + \gamma}{\cos^2\varphi}$,并代入方程(1.2.14),类似地,可得方程(1.2.13)的显式解

$$\psi = \frac{-\beta\mathrm{sn}(\sqrt{\gamma - \alpha}(\xi_1 - \xi_0), m) + \gamma}{\mathrm{cn}(\sqrt{\gamma - \alpha}(\xi_1 - \xi_0), m)} \tag{1.2.27}$$

情形 4:$\Delta < 0$. 因为 $\psi > 0$,作如下变量替换

$$\psi = \sqrt{p_2}\tan^2\frac{\varphi}{2} \tag{1.2.28}$$

将式(1.2.28)代入方程(1.2.14)得

$$\pm 2(\xi_1 - \xi_0) = p_2^{-\frac{1}{4}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{1.2.29}$$

其中,$m^2 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{p_1}{2\sqrt{p_2}}\right)$.

根据方程(1.2.29)及 Jacobi 椭圆函数 cn 的定义,得

$$\mathrm{cn}(2(p_2)^{\frac{1}{4}}(\xi_1 - \xi_0), m) = \cos\varphi \tag{1.2.30}$$

再由方程(1.2.28),可得

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{p_2}}{\psi + \sqrt{p_2}} - 1 \tag{1.2.31}$$

比较方程(1.2.30)和方程(1.2.31),因为 $\psi > 0$,所以有方程(1.2.13)的显式解为

$$\psi = \frac{2\sqrt{p_2}}{1 + \mathrm{cn}(2p_2^{\frac{1}{4}}(\xi_1 - \xi_0), m)} - \sqrt{p_2} \tag{1.2.32}$$

由以上可知,式(1.2.16)~式(1.2.19),式(1.2.21)~式(1.2.23),式(1.2.26),式(1.2.27),及式(1.2.32)是方程(1.2.13)的所有可能的解. 从而就能够写出相应参数条件下方程(1.2.11)的所有精确解,再由式(1.2.7)进而给出方程(1.2.3)和方程(1.2.4)的所有的包络行波解

$$u_1(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px + qy + rt)]\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)} \times \tanh\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi - \xi_0\right)\right]$$

$$v_1 = -d(e + q + pd - 3p^2)\tanh^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi - \xi_0\right)\right] + (e + q + pd - 3p^2)(d - 3p) + r + pq - p^3$$

$$u_2(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px + qy + rt)]\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)} \times \coth\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{2(e + q + pd - 3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi - \xi_0\right)\right]$$

$$v_2 = d(e+q+pd-3p^2)\coth^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+$$
$$(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_3(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\times$$
$$\tan\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]$$

$$v_3 = -d(e+q+pd-3p^2)\tan^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+$$
$$(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_4(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt[4]{6}}{\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0}\exp[i(px+qy+rt)]$$

$$v_4 = -\frac{\sqrt{6}d}{3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)^2}+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_5(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\times$$
$$\sqrt{\tanh^2\left[\sqrt{-\frac{\sqrt{6}}{2}(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+4(e+q+pd-3p^2)}$$

$$v_5 = -\frac{d}{2}[-2(e+q+pd-3p^2)]\tanh^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)+\right.$$
$$\left.4(e+q+pd-3p^2)\right]+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_6(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\times$$
$$\sqrt{\coth^2\left[\sqrt{-\frac{\sqrt{6}}{2}(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+4(e+q+pd-3p^2)}$$

$$v_6 = -\frac{d}{2}[-2(e+q+pd-3p^2)]\coth^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)+\right.$$
$$\left.4(e+q+pd-3p^2)\right]+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_7(x,y,t) = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{2(e+q+pd-3p^2)}\times$$
$$\sqrt{\tan^2\left[\sqrt{-\frac{\sqrt{6}}{2}(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)\right]+4(e+q+pd-3p^2)}$$

$$v_7 = -\frac{d}{2}[2(e+q+pd-3p^2)]\tan^2\left[\frac{\sqrt[4]{6}}{2}\sqrt{-2(e+q+pd-3p^2)}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right)+\right.$$
$$\left.4(e+q+pd-3p^2)\right]+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_8(x,y,t) = \pm\sqrt[4]{6}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)}$$

$$v_8 = -\frac{d}{3}\sqrt{6}\left[\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)\right]+ (e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_9(x,y,t) = \pm\sqrt[4]{6}\sqrt{\frac{-\beta\mathrm{sn}\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)+\gamma}{\mathrm{cn}\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)+\gamma}}\exp[i(px+qy+rt)]$$

$$v_9 = -\frac{\sqrt{6}d}{3}\frac{-\beta\mathrm{sn}\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)+\gamma}{\mathrm{cn}\left(\sqrt{\gamma-\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)+\gamma}+(e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

$$u_{10}(x,y,t) = \pm\sqrt[4]{6p_2}\exp[i(px+qy+rt)]\sqrt{\frac{2}{1+\mathrm{cn}\left(2p_2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)}-1}$$

$$v_{10} = -\frac{d\sqrt{6p_2}}{3}\left[\frac{2}{1+\mathrm{cn}\left(2p_2^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\xi-\xi_0\right),m\right)}-1\right]+ (e+q+pd-3p^2)(d-3p)+r+pq-p^3$$

2.3 Maccari's 方程组的精确解

考虑 Maccari's 方程组[35-37,103]

$$iq_t+q_{xx}+qR=0 \tag{1.2.33}$$

$$R_t+R_y+(|q|^2)_x=0 \tag{1.2.34}$$

我们先作如下规范变换，$q(x,y,t)=u(x,y,t)\exp[i(kx+\alpha y+\lambda t+l)]$，再作行波变换，$u=u(\xi)$，$R=R(\xi)$，$\xi=p(x+ny-2kt)$，则方程(1.2.33)，方程(1.2.34)变成

$$p^2u''-(\lambda+k^2)u+uR=0 \tag{1.2.35}$$

$$(n-2k)R'+(u^2)'=0 \tag{1.2.36}$$

将方程(1.2.36)积分一次，且令积分常数为零，得 $R=-\frac{1}{n-2k}u^2$. 将其代入方程(1.2.35)，则方程(1.2.35)约化成一个常微分方程

$$u''=\frac{1}{p^2(n-2k)}u^3+\frac{\lambda+k^2}{p^2}u \tag{1.2.37}$$

将方程(1.2.37)积分一次，得

$$(u')^2=a_4u^4+a_2u^2+a_0 \tag{1.2.38}$$

其中，$a_4=\frac{1}{2p^2(n-2k)}$，$a_2=\frac{\lambda+k^2}{p^2}$，$a_0$ 是任意常数.

令

$$\left.\begin{aligned} u &= \pm\sqrt{(4a_4)^{-\frac{1}{3}}w} \\ b_1 &= 4a_2(4a_4)^{-\frac{2}{3}} \\ b_0 &= 4a_0(4a_4)^{-\frac{1}{3}} \\ \xi_1 &= (4a_4)^{\frac{1}{3}}\xi \end{aligned}\right\} \tag{1.2.39}$$

则方程(1.2.38)变成

$$(w_{\xi_1})^2 = w(w^2 + b_1 w + b_0) \tag{1.2.40}$$

将方程(1.2.40)用初等积分重新表示

$$\pm(\xi_1 - \xi_0) = \int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{w(w^2 + b_1 w + b_0)}} \tag{1.2.41}$$

根据二阶多项式完全判别系统法,积分式(1.2.41)的所有解的分类都可以给出. 和前一节的方法一样,容易求得 Maccari's 方程组(1.2.33),方程组(1.2.34)的所有包络精确行波解

$$q_1(x,y,t) = \pm\sqrt{(\lambda + k^2)(2k - n)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \tanh\left\{\left[\frac{-(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$R_1 = (\lambda + k^2)\tanh^2\left\{\left[\frac{-(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$q_2(x,y,t) = \pm\sqrt{(\lambda + k^2)(2k - n)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \coth\left\{\left[\frac{-(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$R_2 = (\lambda + k^2)\coth^2\left\{\left[\frac{-(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$q_3(x,y,t) = \pm\sqrt{(\lambda + k^2)(n - 2k)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \tan\left\{\left[\frac{(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$R_3 = -(\lambda + k^2)\tan^2\left\{\left[\frac{(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right]^{\frac{1}{6}}\left[\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right]\right\}$$

$$q_4(x,y,t) = \pm\frac{2}{\left[\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right]^{\frac{1}{2}}\xi - \left[\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right]^{\frac{1}{6}}\xi_0} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)]$$

$$R_4 = -\frac{4\left[\frac{p^2}{2(n - 2k)^2}\right]^{\frac{1}{3}}}{[2(n - 2k)^2]^{\frac{1}{3}}\left\{\left[\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right]^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right\}^2}$$

$$q_5(x,y,t) = \pm\sqrt{2(\lambda + k^2)(n - 2k)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \left\{\frac{1}{2}\tanh^2\left[\left(\frac{(\lambda + k^2)^3(n - 2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n - 2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)\right] - 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_5 = -2(\lambda + k^2)\left\{\frac{1}{2}\tanh^2\left[\left(\frac{(\lambda + k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)\right] - 1\right\}$$

$$q_6(x,y,t) = \pm\sqrt{2(\lambda + k^2)(n-2k)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \left\{\frac{1}{2}\coth^2\left[\left(\frac{(\lambda + k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)\right] - 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_6 = -2(\lambda + k^2)\left\{\frac{1}{2}\coth^2\left[\left(\frac{(\lambda + k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)\right] - 1\right\}$$

$$q_7(x,y,t) = \pm\sqrt{2(\lambda + k^2)(2k-n)} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \left\{\frac{1}{2}\tan^2\left[\left(\frac{-(\lambda + k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)\right] + 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_7 = 2(\lambda + k^2)\left\{\frac{1}{2}\tan^2\left[\left(\frac{-(\lambda + k^2)^3(n-2k)^2}{32p^2}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)\right] + 1\right\}$$

$$q_8(x,y,t) = \pm\left[\frac{p^2(n-2k)}{2}\right]^{\frac{1}{6}} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \left\{\alpha + (\beta - \alpha)\operatorname{sn}^2\left[\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right), m\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_8 = -\left[\frac{p^2}{2(n-2k)^2}\right]^{\frac{1}{3}}\left\{\alpha + (\beta - \alpha)\operatorname{sn}^2\left[\frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{2}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right), m\right]\right\}$$

$$q_9(x,y,t) = \pm\left[\frac{p^2(n-2k)}{2}\right]^{\frac{1}{6}} \times \exp[i(kx + \alpha y + \lambda t + l)] \times \left\{\frac{-\beta\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\gamma - \alpha}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)/2, m\right) + \gamma}{\operatorname{cn}^2\left(\sqrt{\gamma - \alpha}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)/2, m\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$R_9 = \left[\frac{p^2}{2(n-2k)^2}\right]^{\frac{1}{3}} \times \frac{\beta\operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\gamma - \alpha}\left(\left(\frac{p^2(n-2k)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)/2, m\right) - \gamma}{\operatorname{cn}^2\left(\sqrt{\gamma - \alpha}\left(\left(\frac{p^2(n-2k)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right)/2, m\right)}$$

$$q_{10}(x,y,t) = \pm[2a_0p^2(n-2k)]^{\frac{1}{4}} \times \exp[i(kx + \alpha y \mp \lambda t + l)] \times \left\{\frac{2}{1 + \operatorname{cn}\left[(32a_0^3p^2(n-2k))^{\frac{1}{12}}\left(\left(\frac{2}{p^2(n-2k)}\right)^{\frac{1}{3}}\xi - \xi_0\right), m\right]} - 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

第3章 三阶多项式完全判别系统法及其应用

3.1 三阶多项式完全判别系统法

如果一个非线性数学物理方程,通过行波变换可以约化成以下微分方程

$$(u')^2 = a_3u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0 \tag{1.3.1}$$

那么,只要我们给出方程(1.3.1)的所有解的分类,则原非线性数学物理方程的所有单行波解的分类就能给出.下面我们就给出方程(1.3.1)的所有解的分类.

首先令 $w=(a_3)^{\frac{1}{3}}u, d_2=a_2(a_3)^{-\frac{2}{3}}, d_1=a_1(a_3)^{-\frac{1}{3}}, d_0=a_0$,则方程(1.3.1)可写成

$$(w')^2 = w^3 + d_2w^2 + d_1w + d_0 \tag{1.3.2}$$

那么方程(1.3.1)写成积分形式为

$$\pm(a_3)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0) = \int \frac{1}{\sqrt{w^3+d_2w^2+d_1w+d_0}}\mathrm{d}w \tag{1.3.3}$$

这里我们记 $F(w)=w^3+d_2w^2+d_1w+d_0$,其多项式完全判别系统即为式(1.1.3).那么积分式(1.3.3)的解有以下四种情形.

情形1:$\Delta=0, D_1<0$ 时,也就是 $-27\left(\frac{2d_2^3}{27}+d_0-\frac{d_1d_0}{3}\right)^2-4\left(d_1-\frac{d_2^2}{3}\right)^3=0$,同时 $d_1-\frac{d_2^2}{3}<0$.

此时 $F(w)=0$ 有一个二重实根和一个单重实根,设为 $F(w)=(w-\alpha)^2(w-\beta)$,其中 $\alpha\neq\beta$.则当 $w>\beta$ 时,由式(1.3.3)有

$$\pm(\xi-\xi_0) = \int\frac{\mathrm{d}w}{(w-\alpha)\sqrt{w-\beta}} = \begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}}\ln\left|\frac{\sqrt{w-\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{w-\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}\right| & (\alpha>\beta)\\ \frac{2}{\sqrt{\beta-\alpha}}\arctan\sqrt{\frac{w-\beta}{\beta-\alpha}} & (\alpha<\beta)\end{cases}$$

那么相应地方程(1.3.1)的解为

$$u_1 = (a_3)^{-\frac{1}{3}}\left\{(\alpha-\beta)\tanh^2\left[\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{2}(a_3)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0)\right]+\beta\right\}\quad(\alpha>\beta)$$

$$u_2 = (a_3)^{-\frac{1}{3}}\left\{(\alpha-\beta)\coth^2\left[\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{2}(a_3)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0)\right]+\beta\right\}\quad(\alpha>\beta)$$

$$u_3 = (a_3)^{-\frac{1}{3}}\left\{(-\alpha+\beta)\tan^2\left[\frac{\sqrt{-\alpha+\beta}}{2}(a_3)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0)\right]+\beta\right\}\quad(\alpha<\beta)$$

情形2:$\Delta=0, D_1=0$ 时,也就是 $-27\left(\frac{2d_2^3}{27}+d_0-\frac{d_1d_0}{3}\right)^2-4\left(d_1-\frac{d_2^2}{3}\right)^3=0$,同时 $d_1-\frac{d_2^2}{3}=0$.

此时 $F(w)=0$ 有一个三重实根,设为 $F(w)=(w-\alpha)^3$,则相应地方程(1.3.1)的解为

$$u_4 = 4(a_3)^{-\frac{2}{3}}(\xi-\xi_0)^{-2}+\alpha$$

情形3:$\Delta>0, D_1<0$ 时,也就是 $-27\left(\frac{2d_2^3}{27}+d_0-\frac{d_1d_0}{3}\right)^2-4\left(d_1-\frac{d_2^2}{3}\right)^3>0$,同时 $d_1-\frac{d_2^2}{3}<0$.

此时 $F(w)=0$ 有三个不同实根，α,β 和 γ，且 $\alpha<\beta<\gamma$，当 $\alpha<w<\gamma$ 时，作变量替换 $w=\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\varphi$，由式(1.3.3)有

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{F(w)}}=\int\frac{2(\beta-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\gamma-\alpha}(\beta-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\gamma-\alpha}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} \tag{1.3.4}$$

其中，$m^2=\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

由式(1.3.4)和 Jacobi 椭圆正弦函数的定义，知 $w=\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)$，则相应地方程(1.3.1)的解为

$$u_5=(a_3)^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}(a_3)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)\right]$$

当 $w>\gamma$ 时，作变换 $w=\dfrac{-\beta\sin^2\varphi+\gamma}{\cos^2\varphi}$，类似地可以得到方程(1.3.1)的解

$$u_6=(a_3)^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{\gamma-\beta\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}(a_3)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\dfrac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}(a_3)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)}\right]$$

这里 $m^2=\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

情形4：$\Delta<0$ 时，也就是 $-27\left(\dfrac{2d_2^3}{27}+d_0-\dfrac{d_1d_0}{3}\right)^2-4\left(d_1-\dfrac{d_2^2}{3}\right)^3<0$ 时. 此时 $F(w)=0$ 仅有一个实根，令 $F(w)=(w-\alpha)(w^2+pw+q)$，其中 $p^2-4q<0$. 当 $w>\alpha$ 时，作变量替换 $w=\alpha+\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\tan^2\dfrac{\varphi}{2}$，则由式(1.3.3)有

$$\xi-\xi_0=\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(w-\alpha)(w^2+pw+q)}}=\int\frac{\sqrt{\alpha^2+p_0\alpha+q_0}\dfrac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi}{(\alpha^2+p_0\alpha+q_0)^{\frac{3}{4}}\dfrac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{1}{(\alpha^2+p_0\alpha+q_0)^{\frac{1}{4}}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} \tag{1.3.5}$$

这里 $m^2=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right)$.

由式(1.3.5)和 Jacobia 椭圆余弦函数的定义，知 $\mathrm{cn}((\alpha^2+p\alpha+q))^{\frac{1}{4}}(\xi_1-\xi_0),m)=\cos\varphi$，故有

$$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}{w-\alpha+\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}-1$$

从而,当 $w>\alpha$ 时,有

$$w=\alpha+\frac{2\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}{1+\mathrm{cn}((\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{1}{4}}(\xi-\xi_0),m)}-\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}$$

相应地方程(1.3.1)的解为

$$u_7=(a_3)^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha+\frac{2\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}{1+\mathrm{cn}((\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{1}{4}}(a_3)^{-\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m)}-\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\right]$$

如上所示,方程(1.3.1)的所有解的分类就是 $u_i,i=1,\cdots,7$.

3.2 2+1维 Zakharov-Kuznetsov 方程的精确解

考虑2+1维 Zakharov-Kuznetsov 方程[41]

$$u_t+auu_x+b(u_{xx}+u_{yy})_x=0 \tag{1.3.6}$$

首先,作行波变换,$u(x,y,t)=u(\xi),\xi=kx+ly+\omega t$,并积分一次后方程(1.3.6)变为

$$\omega u+\frac{ak}{2}u^2+(bk^3+bkl^2)u''=c \tag{1.3.7}$$

其中,c 为积分常数.

对式(1.3.7)积分一次,得方程

$$(u')^2=a_3u^3+a_2u^2+a_1u+a_0 \tag{1.3.8}$$

其中,$a_3=-\frac{a}{3b(k^2+l^2)},a_2=-\frac{\omega}{bk(k^2+l^2)},a_1,a_0$ 为任意常数.

根据三阶多项式的完全判别系统法,容易写出2+1维 Zakharov-Kuznetsov 方程(1.3.6)的所有精确行波解:

$$u_1=\left[\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right]^{-\frac{1}{3}}\left\{(\alpha-\beta)\tanh^2\left[\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{2}\left(\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0)\right]+\beta\right\}\quad(\alpha>\beta)$$

$$u_2=\left[\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right]^{-\frac{1}{3}}\left\{(\alpha-\beta)\coth^2\left[\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{2}\left(\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0)\right]+\beta\right\}\quad(\alpha>\beta)$$

$$u_3=\left[\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right]^{-\frac{1}{3}}\left\{(-\alpha+\beta)\tan^2\left[\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{2}\left(\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0)\right]+\beta\right\}\quad(\alpha<\beta)$$

$$u_4=4\left[\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right]^{-\frac{2}{3}}(\xi-\xi_0)^{-2}+\alpha$$

$$u_5=\left[\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right]^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)\right]$$

$$u_6=\left[\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right]^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{\gamma-\beta\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)}\right]$$

这里 $m^2=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

$$u_7=\left[\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right]^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha+\frac{2\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}{1+\mathrm{cn}\left((\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{-a}{3b(k^2+l^2)}\right)^{-\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)}-\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\right]$$

这里 $m^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right)$.

3.3 Kadomtsev-Petviashvili 方程的精确解

考虑 Kadomtsev-Petviashvili 方程[39]

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+\lambda u_{yy}=0 \tag{1.3.9}$$

作行波变换,$u(x,y,t)=u(\xi)$,$\xi=kx+ly+\omega t$,则式(1.3.9)约化为

$$\omega ku''+6k^2(u')^2+6k^2uu''+k^4u^{(4)}+\lambda l^2u''=0 \tag{1.3.10}$$

再对式(1.3.10)积分两次,并且令第一次积分常数为零,得

$$u''=-\frac{3}{k^2}u^2+\frac{-\omega k-\lambda l^2}{k^4}u+D_0 \tag{1.3.11}$$

其中,D_0 为任意常数.

将式(1.3.11)写成积分形式为

$$(u')^2=a_3u^3+a_2u^2+a_1u+a_0 \tag{1.3.12}$$

其中,$a_3=-\frac{2}{k^2}$,$a_2=\frac{-\omega k-\lambda l^2}{k^4}$,$a_1=D_0$,$a_0$ 为任意常数.

根据三阶多项式的完全判别系统法,很容易写出 Kadomtsev-Petviashvili 方程(1.3.9)的精确行波解,它们是式(1.3.9)的所有单行波解的分类,这里略.

3.4 2+1 维 Bousenisq 方程的精确解

考虑如下 2+1 维 Bousenisq 方程[42,73]

$$u_{tt}-u_{xx}+3(u^2)_{xx}-u_{xxxx}-u_{yy}=0 \tag{1.3.13}$$

作行波变换,$u=u(\xi)$,$\xi=kx+ly+\omega t$,再积分两次,并且令第一次积分常数为零,则方程(1.3.13)成为

$$u''=a_2u^2+a_1u+a_0 \tag{1.3.14}$$

其中,$a_2=\frac{3}{k^2}$,$a_1=\frac{\omega^2-k^2-l^2}{k^4}$,$a_0$ 为任意常数.

将式(1.3.14)积分一次得

$$(u')^2=\frac{2}{3}a_2u^3+a_1u^2+2a_0u+d \tag{1.3.15}$$

其中,d 为积分常数.

显然方程(1.3.15)与方程(1.3.1)具有相同的形式,根据三阶多项式的完全判别系统法,容易写出 2+1 维 Bousenisq 方程的所有精确行波解,这里略.

3.5 正则长波方程的精确解

考虑正则长波方程[43]

$$u_t + au_x + 2uu_x + bu_{xxt} = 0 \tag{1.3.16}$$

作行波变换，$u=u(\xi)$，$\xi=kx+\omega t$，则方程(1.3.16)变为

$$\omega u' + kau' + 2kuu' + bk^2\omega u''' = 0 \tag{1.3.17}$$

将方程(1.3.17)积分两次得

$$(u')^2 = a_3u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0 \tag{1.3.18}$$

其中，$a_3 = -\dfrac{2}{3bk\omega}$，$a_2 = -\dfrac{\omega+ka}{bk^2\omega}$，$a_1$，$a_0$ 为任意常数.

根据三阶多项式的完全判别系统法，容易写出方程(1.3.18)的所有解的分类，从而写出正则长波方程的所有精确行波解，这里略.

3.6 Pochharmer-Chree 方程的精确解

考虑 Pochharmer-Chree 方程[64]

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta u + \gamma u^3 + \delta u^5 = 0 \tag{1.3.19}$$

作行波变换，$u=u(\xi)$，$\xi=kx+\omega t$，则方程(1.3.19)变为

$$(\omega^2 - \alpha k^2)u'' + \beta u + \gamma u^3 + \delta u^5 = 0 \tag{1.3.20}$$

将方程(1.3.20)积分一次得

$$(u')^2 = a_3u^6 + a_2u^4 + a_1u^2 + d \tag{1.3.21}$$

其中，$a_3 = \dfrac{\delta}{3(\alpha k^2-\omega^2)}$，$a_2 = \dfrac{\gamma}{2(\alpha k^2-\omega^2)}$，$a_1 = \dfrac{\beta}{\alpha k^2-\omega}$，$d$ 是积分常数.

令 $v=u^2$，则方程(1.3.21)变为

$$\pm 2\sqrt{\varepsilon a_3}(\xi-\xi_0) = \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\varepsilon v(v^3+pv^2+qv+d)}} \tag{1.3.22}$$

其中，$\varepsilon=\pm1$，$p=\dfrac{3\gamma}{2\delta}$，$q=\dfrac{3\gamma}{\delta}$.

如果 $a_3>0$，我们取 $\varepsilon=1$；如果 $a_3<0$，我们取 $\varepsilon=-1$. 根据三阶多项式完全判别法，方程(1.3.22)的解有以下几种情形.

情形1：当 $\Delta=0$，$D_1<0$ 时，$v^3+pv^2+qv+d=(v-\alpha)^2(v-\beta)$，其中 α,β 是实数，$\alpha\neq\beta$，且 $\beta>0$. 如果 $\varepsilon=1$，当 $\alpha>\beta$ 且 $v>\beta$ 时，或者当 $\alpha<0$ 且 $v<0$ 时，由方程(1.3.22)可得

$$\pm 2\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}\ln\frac{[\sqrt{\alpha(v-\beta)}-\sqrt{v(\alpha-\beta)}]^2}{|v-\alpha|} \tag{1.3.23}$$

当 $\alpha>\beta$ 且 $v<0$ 时，或者当 $\alpha<v$ 且 $v<\beta$ 时，由方程(1.3.22)可得

$$\pm 2\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}\ln\frac{[\sqrt{-\alpha(v-\beta)}-\sqrt{v(\beta-\alpha)}]^2}{|v-\alpha|} \tag{1.3.24}$$

当 $\beta>\alpha>0$ 时，由方程(1.3.22)可得

$$\pm 2\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\alpha(\beta-\alpha)}\arcsin\frac{\alpha(v-\beta)+v(\alpha-\beta)}{\beta|(v-\alpha)|} \tag{1.3.25}$$

如果 $\varepsilon=-1$，当 $\alpha>\beta$ 且 $v>\beta$ 时，或者当 $\alpha<0$ 且 $v<0$ 时，由方程(1.3.22)可得

$$\pm 2\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha(\beta-\alpha)}\ln\frac{\left[\sqrt{\alpha(-v+\beta)}-\sqrt{v(\beta-\alpha)}\right]^2}{|v-\alpha|} \tag{1.3.26}$$

当 $\alpha>\beta$ 且 $v<0$ 时，或者当 $\alpha<0$ 且 $v<\beta$ 时，由方程(1.3.22)可得

$$\pm 2\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha(\beta-\alpha)}\ln\frac{\left[\sqrt{-\alpha(-v+\beta)}-\sqrt{v(\alpha-\beta)}\right]^2}{|v-\alpha|} \tag{1.3.27}$$

当 $\beta>\alpha>0$ 时，由方程(1.3.22)可得

$$\pm 2\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}\arcsin\frac{(-v+\beta)(\alpha-\gamma)+v(\beta-\alpha)}{|\beta(v-\alpha)|} \tag{1.3.28}$$

情形2：$\Delta=0,D_1=0$ 时，$v^3+pv^2+qv+d=(v-\alpha)^3$，这里 α 是实数. 如果 $\varepsilon=1$，当 $v>\alpha$ 且 $v>0$时，或者当 $v<\alpha$ 且 $v<0$ 时，由方程(1.3.22)可得

$$v=\frac{\alpha}{\alpha^2a_3(\xi-\xi_0)^2-1}+\alpha \tag{1.3.29}$$

如果 $\varepsilon=-1$，当 $v>\alpha$ 且 $v<0$ 时，或者当 $v<\alpha$ 且 $v>0$ 时，由方程(1.3.22)可得

$$v=\frac{\alpha}{-a_3\alpha^2(\xi-\xi_0)^2-1}+\alpha \tag{1.3.30}$$

情形3：$\Delta>0,D_1<0$ 时，$v^3+pv^2+qv+d=(v-\alpha)(v-\beta)(v-\gamma)$，$\alpha,\beta,\gamma$ 是不同的实数，$0<\alpha<\beta<\gamma$. 如果 $\varepsilon=1$，当 $v>0$ 或 $v<\gamma$ 时，于是方程(1.3.22)相应条件下的解为

$$v=\frac{-\gamma\alpha\,\mathrm{sn}^2(\sqrt{-\beta(\alpha-\gamma)}\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0),m)}{-\gamma\,\mathrm{sn}^2(\sqrt{-\beta(\alpha-\gamma)}\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0),m)-(\alpha-\gamma)} \tag{1.3.31}$$

$$v=\frac{\gamma(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}^2(\sqrt{-\beta(\alpha-\gamma)}\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0),m)-\beta(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}^2(\sqrt{-\beta(\alpha-\gamma)}\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0),m)-(\alpha-\gamma)} \tag{1.3.32}$$

其中，$m^2=\dfrac{\gamma(\alpha-\beta)}{\beta(\alpha-\gamma)}$.

如果 $\varepsilon=-1$，且 $0>v>\alpha$，则方程(1.3.22)的解为

$$v=\frac{-\beta\alpha\sin^2\varphi+\alpha\beta}{-\alpha\sin^2\varphi+\beta} \tag{1.3.33}$$

如果 $\gamma<v<\beta$，方程(1.3.22)的解为

$$v=\frac{-\beta\alpha\,\mathrm{sn}^2(\sqrt{-\beta(\alpha-\gamma)}\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0),m)+\alpha\beta}{-\alpha\,\mathrm{sn}^2(\sqrt{-\beta(\alpha-\gamma)}\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0),m)+\beta} \tag{1.3.34}$$

$$v=\frac{-\gamma\beta}{(\beta-\gamma)\,\mathrm{sn}^2(\sqrt{-\beta(\alpha-\gamma)}\sqrt{a_3}(\xi-\xi_0),m)-\beta} \tag{1.3.35}$$

其中，$m^2=\dfrac{\alpha(\beta-\gamma)}{\beta(\alpha-\gamma)}$.

情形4：$\Delta<0$ 时，此时 $v^3+pv^2+qv+d=(v-\alpha)[(v-l)^2+s^2]$，其中 α,l,s 都是实数，并且 $\alpha>0,l,s>0$. 则方程(1.3.22)的解为（这里正号对应 $\varepsilon=1$，负号对应 $\varepsilon=-1$）

$$v=\frac{a\,\mathrm{cn}\left(\dfrac{\sqrt{\mp 2sm_1\alpha a_3}}{mm_1}(\xi-\xi_0),m\right)+b}{c\,\mathrm{cn}\left(\dfrac{\sqrt{\mp 2sm_1\alpha a_3}}{mm_1}(\xi-\xi_0),m\right)+d} \tag{1.3.36}$$

其中，$a=\frac{1}{2}\alpha(c-d)$，$b=\frac{1}{2}\alpha(d-c)$，$c=\alpha-l-\frac{s}{m_1}$，$d=\alpha-l-sm_1$，$E=\frac{s^2-l(\alpha-l)}{s\alpha}$，$m_1=E\pm\sqrt{E^2+1}$，$m^2=\frac{1}{1+m_1^{\ 2}}$.

由以上可知，方程(1.3.22)的所有解的分类为式(1.3.23)～式(1.3.36)，从而容易写出Pochharmer-Chree方程(1.3.19)的精确解，这里略.



第4章　四阶多项式完全判别系统法及其应用

4.1　四阶多项式完全判别系统法

如果一个非线性数学物理方程,通过行波变换可以约化成以下微分方程

$$[w'(\xi)]^2 = \varepsilon(w^4 + pw^2 + qw + r) \tag{1.4.1}$$

这里 $\varepsilon = \pm 1$,那么,只要我们给出方程(1.4.1)的所有解的分类,则该非线性数学物理方程的所有精确行波解就能给出.下面我们就给出方程(1.4.1)的所有解的分类.

首先将式(1.4.1)写成积分形式

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dw}{\sqrt{\varepsilon(w^4 + pw^2 + qw + r)}} \tag{1.4.2}$$

根据多项式 $F(w) = w^4 + pw^2 + qw + r$ 的完全判别系统式(1.1.4),可以得到方程(1.4.2)的所有解的分类,共有以下九种情形.

情形1:$D_2 < 0, D_3 = 0, D_4 = 0$. $F(w)$有一对二重共轭复根,即 $F(w) = [(w - l)^2 + s^2]^2$,这里 l_1, s_1 是实数,$s_1 > 0$. 当 $\varepsilon = 1$ 时,由方程(1.4.2)可得

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{dw}{(w - l)^2 + s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{w - l}{s}$$

其中,ξ_0 是积分常数.

那么方程(1.4.1)的解为

$$w = s\tan[s(\xi - \xi_0)] + l$$

这是三角函数周期解.

情形2:$D_2 = 0, D_3 = 0, D_4 = 0$. $F(w)$有四重零实根,即 $F(w) = w^4$. 则当 $a_4 > 0$ 时,由方程(1.4.2)可得

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{dw}{w^2} = -w^{-1}$$

于是可导出方程(1.4.1)的解

$$w = -(\xi - \xi_0)^{-1}$$

这是有理解.

情形3:$D_2 > 0, D_3 = 0, D_4 = 0, E_2 > 0$. $F(w)$有两个不同的二重实根,即 $F(w) = (w - \alpha)^2(w - \beta)^2$,这里 α, β 是实数,$\alpha > \beta$. 如果 $\varepsilon = 1$,则当 $w > \alpha$ 或 $w < \beta$ 时,由方程(1.4.2)可得

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{dw}{(w - \alpha)(w - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta}\ln\left|\frac{w - \alpha}{w - \beta}\right| \tag{1.4.3}$$

若 $w > \alpha$ 或 $w < \beta$,由方程(1.4.3)可得方程(1.4.1)的解

$$w = \frac{\beta - \alpha}{e^{(\alpha-\beta)(\xi-\xi_0)} - 1} + \beta = \frac{\beta - \alpha}{2}\left[\coth\frac{(\alpha - \beta)(\xi - \xi_0)}{2} - 1\right] + \beta$$

若 $\beta < w < \alpha$,由方程(1.4.3)可得方程(1.4.1)的解

$$w=\frac{\beta-\alpha}{-e^{(\alpha-\beta)(\xi-\xi_0)}-1}+\beta=\frac{\beta-\alpha}{2}\left[\tanh\frac{(\alpha-\beta)(\xi-\xi_0)}{2}-1\right]+\beta$$

情形4:$D_2>0,D_3>0,D_4=0$. $F(w)$有一个二重实根和两个一重实根,即 $F(w)=(w-\alpha)^2(w-\beta)(w-\gamma)$,这里 α,β,γ 都是实数,且 $\beta>\gamma$. 如果 $\varepsilon=1$,当 $\alpha>\beta$ 且 $w>\beta$ 时,或者当 $\alpha<\gamma$ 且 $w<\gamma$ 时,由方程(1.4.2)可得方程(1.4.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\ln\frac{\left[\sqrt{(w-\beta)(\alpha-\gamma)}-\sqrt{(\alpha-\beta)(w-\gamma)}\right]^2}{|w-\alpha|}$$

当 $\alpha>\beta$ 且 $w<\gamma$ 时,或者当 $\alpha<\gamma$ 且 $w<\beta$ 时,由方程(1.4.2)可得方程(1.4.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\ln\frac{\left[\sqrt{(w-\beta)(\gamma-\alpha)}-\sqrt{(\beta-\alpha)(w-\gamma)}\right]^2}{|w-\alpha|}$$

当 $\beta>\alpha>\gamma$ 时,由方程(1.4.2)可得方程(1.4.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)}\arcsin\frac{(w-\beta)(\alpha-\gamma)+(\alpha-\beta)(w-\gamma)}{|(w-\alpha)(\beta-\gamma)|}$$

如果 $\varepsilon=-1$,当 $\alpha>\beta$ 且 $w>\beta$ 时,或者当 $\alpha<\gamma$ 且 $w<\gamma$ 时,由方程(1.4.2)可得方程(1.4.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)}\ln\frac{\left[\sqrt{(-w+\beta)(\alpha-\gamma)}-\sqrt{(\beta-\alpha)(w-\gamma)}\right]^2}{|w-\alpha|}$$

当 $\alpha>\beta$ 且 $w<\gamma$ 时,或者当 $\alpha<\gamma$ 且 $w<\beta$ 时,由方程(1.4.2)可得方程(1.4.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)}\ln\frac{\left[\sqrt{(-w+\beta)(\gamma-\alpha)}-\sqrt{(\alpha-\beta)(w-\gamma)}\right]^2}{|w-\alpha|}$$

当 $\beta>\alpha>\gamma$ 时,由方程(1.4.2)可得方程(1.4.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\arcsin\frac{(-w+\beta)(\alpha-\gamma)+(\beta-\alpha)(w-\gamma)}{|(w-\alpha)(\beta-\gamma)|}$$

情形5:$D_2>0,D_3=0,D_4=0,E_2=0$. $F(w)$有一个三重实根和一个一重实根,即 $F(w)=(w-\alpha)^3(w-\beta)$,这里 α,β 都是实数. 如果 $\varepsilon=1$,当 $w>\alpha$ 且 $w>\beta$ 时,或者当 $w<\alpha$ 且 $w<\beta$ 时,由方程(1.4.2)可得方程(1.4.1)的解为

$$w=\frac{4(\alpha-\beta)}{(\beta-\alpha)^2(\xi-\xi_0)^2-4}+\alpha$$

如果 $\varepsilon=-1$,当 $w>\alpha$ 且 $w<\beta$ 时,或者当 $w<\alpha$ 且 $w>\beta$ 时,由方程(1.4.2)可得方程(1.4.1)的解为

$$w=\frac{4(\alpha-\beta)}{-(\beta-\alpha)^2(\xi-\xi_0)^2-4}+\alpha$$

情形6:$D_4=0,D_2D_3<0$, $F(w)$有一个二重实根和一对共轭复根,即 $F(w)=(w-\alpha)^2[(w-l)^2+s^2]$. 如果 $\varepsilon=1$,由方程(1.4.2)有

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{dw}{(w-\alpha)\sqrt{(w-l)^2+s^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}}\ln\left|\frac{\gamma w+\delta-\sqrt{(w-l)^2+s^2}}{w-\alpha}\right|$$

其中,$\gamma=\dfrac{\alpha-2l}{\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}}$,$\delta=\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}-\dfrac{\alpha(\alpha-2l)}{\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}}$.

相应地方程(1.4.1)的解为

$$w=\frac{\left[e^{\pm\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}(\xi-\xi_0)}-\gamma\right]+\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}(2-\gamma)}{\left[e^{\pm\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}(\xi-\xi_0)}-\gamma\right]^2-1}$$

这是孤波解.

情形7:$D_4>0,D_3>0,D_1>0$. $F(w)$有四个实根,即 $F(w)=(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)(w-\alpha_3)(w-\alpha_4)$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是实数,$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4$. 如果 $\varepsilon=1$,当 $w>\alpha_1$ 或 $w<\alpha_4$ 时,作如下变换

$$w=\frac{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_4)\sin^2\varphi-\alpha_1(\alpha_2-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_4)\sin^2\varphi-(\alpha_2-\alpha_4)}$$

如果 $\alpha_3<w<\alpha_2$,则作如下变换

$$w=\frac{\alpha_4(\alpha_2-\alpha_3)\sin^2\varphi-\alpha_3(\alpha_2-\alpha_4)}{(\alpha_2-\alpha_3)\sin^2\varphi-(\alpha_2-\alpha_4)}$$

再由方程(1.4.2)可得

$$\begin{aligned}\xi-\xi_0&=\int\frac{dw}{\sqrt{(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)(w-\alpha_3)(w-\alpha_4)}}\\&=\frac{2}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}\end{aligned}\tag{1.4.4}$$

其中,$m^2=\dfrac{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$.

由方程(1.4.4)及雅可比椭圆正弦函数的定义可得

$$\operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)=\sin\varphi$$

于是方程(1.4.1)相应条件下的解为

$$w=\frac{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_4)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)-\alpha_1(\alpha_2-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_4)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)-(\alpha_2-\alpha_4)}$$

$$w=\frac{\alpha_4(\alpha_2-\alpha_3)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)-\alpha_3(\alpha_2-\alpha_4)}{(\alpha_2-\alpha_3)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)-(\alpha_2-\alpha_4)}$$

如果 $\varepsilon=-1$,且 $\alpha_1>w>\alpha_2$,则作如下变换

$$w=\frac{\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\varphi-\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\varphi-(\alpha_1-\alpha_3)}$$

如果 $\alpha_4<w<\alpha_3$,则作如下变换

$$w=\frac{\alpha_1(\alpha_3-\alpha_4)\sin^2\varphi-\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_4)\sin^2\varphi-(\alpha_3-\alpha_1)}$$

类似地可得到方程(1.4.1)的解为

$$w=\frac{\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)-\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)-(\alpha_1-\alpha_3)}$$

$$w=\frac{\alpha_1(\alpha_3-\alpha_4)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)-\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_4)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi-\xi_0),m\right)-(\alpha_3-\alpha_1)}$$

其中，$m^2=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$.

情形8：$D_4<0,D_2D_3\geqslant 0$，$F(w)$有两个不同的实根和一对共轭复根，即 $F(w)=(w-\alpha)(w-\beta)[(w-l)^2+s^2]$，其中 $\alpha>\beta,l,s>0$ 是实数. 作如下变换

$$w=\frac{a\cos\varphi+b}{c\cos\varphi+d}$$

其中，$a=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)c-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)d$，$b=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)d-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)c$，$c=\alpha-l-\frac{s}{m_1}$，$d=\alpha-l-sm_1$，$E=\frac{s^2+(\alpha-l)(\beta-l)}{s(\alpha-\beta)}$，$m_1=E\pm\sqrt{E^2+1}$.

则由方程(1.4.2)得

$$\xi-\xi_0=\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\pm(w-\alpha)(w-\beta)[(w-l)^2+s^2]}}$$

$$=\frac{2mm_1}{\sqrt{\mp 2sm_1(\alpha-\beta)}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}\tag{1.4.5}$$

其中，$m^2=\frac{1}{1+{m_1}^2}$.

由方程(1.4.5)及雅可比椭圆余弦函数的定义可得

$$\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{\mp 2sm_1(\alpha-\beta)}}{2mm_1}(\xi-\xi_0),m\right)=\cos\varphi$$

则方程(1.4.1)的解为

$$w=\frac{a\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{\mp 2sm_1(\alpha-\beta)}}{2mm_1}(\xi-\xi_0),m\right)+b}{c\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{\mp 2sm_1(\alpha-\beta)}}{2mm_1}(\xi-\xi_0),m\right)+d}$$

这是椭圆函数双周期解(这里正号对应 $\varepsilon=-1$，负号对应 $\varepsilon=1$).

情形9：$D_4>0,D_2D_3\leqslant 0$，$F(w)$有两对共轭复根，即 $F(w)=[(w-l_1)^2+{s_1}^2][(w-l_2)^2+{s_2}^2]$，其中 l_1,l_2,s_1,s_2 是实数，$s_1\geqslant s_2>0$.

如果 $\varepsilon=1$，作如下变换

$$w=\frac{a\tan\varphi+b}{c\tan\varphi+d}$$

其中，$a=l_1c+s_1d$，$b=l_1d-s_1c$，$c=-s_1-\frac{s_2}{m_1}$，$d=l_1-l_2$，$E=\frac{(l_1-l_2)^2+{s_1}^2+{s_2}^2}{2s_1s_2}$，$m_1=E+$

$\sqrt{E^2-1}$.

再由方程(1.4.2)可得

$$\xi-\xi_0=\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{[(w-l_1)^2+s_1^{\ 2}][(w-l_2)^2+s_2^{\ 2}]}}$$
$$=\frac{c^2+d^2}{s_2\sqrt{(c^2+d^2)(m_1^{\ 2}c^2+d^2)}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}} \tag{1.4.6}$$

其中,$m^2=\dfrac{m_1^{\ 2}-1}{m_1^{\ 2}}$.

由方程(1.4.6)及雅可比正弦和余弦函数的定义得

$$\mathrm{sn}\left(\frac{s_2\sqrt{(c^2+d^2)(m_1^{\ 2}c^2+d^2)}}{c^2+d^2}(\xi-\xi_0),m\right)=\sin\varphi$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{s_2\sqrt{(c^2+d^2)(m_1^{\ 2}c^2+d^2)}}{c^2+d^2}(\xi-\xi_0),m\right)=\cos\varphi$$

于是方程(1.4.2)的解为

$$w=\frac{a\mathrm{sn}(\eta(\xi-\xi_0),m)+b\mathrm{cn}(\eta(\xi-\xi_0),m)}{c\mathrm{sn}(\eta(\xi-\xi_0),m)+d\mathrm{cn}(\eta(\xi-\xi_0),m)}$$

其中,$\eta=\dfrac{s_2\sqrt{(c^2+d^2)(m_1^{\ 2}c^2+d^2)}}{c^2+d^2}$.

4.2 Medium Equal Width 方程的精确解

考虑 Medium Equal Width 方程[44]

$$u_t+3u^2u_x-au_{xxt}=0 \tag{1.4.7}$$

作行波变换,$u=u(\xi)$,$\xi=kx+\omega t$,则方程(1.4.7)变成

$$\omega u'+3ku^2u'-ak^2\omega u'''=0 \tag{1.4.8}$$

将方程(1.4.8)积分两次得

$$(u')^2=a_4u^4+a_2u^2+a_1u+a_0 \tag{1.4.9}$$

其中

$$\begin{cases}a_4=\dfrac{1}{2ak\omega}\\[2mm] a_2=\dfrac{1}{ak^2}\\[2mm] a_1=\dfrac{2c_0}{ak^2\omega}\\ c_0,a_0\ \text{是积分常数}\end{cases} \tag{1.4.10}$$

当 $a_4>0$ 时,作如下变换

$$\begin{cases}w=(a_4)^{\frac{1}{4}}u\\ \xi_1=(a_4)^{\frac{1}{4}}\xi\end{cases} \tag{1.4.11}$$

将式(1.4.11)代入式(1.4.9)得

$$w_{\xi_1}{}^2 = F(w) = w^4 + pw^2 + qw + r \tag{1.4.12}$$

其中

$$\begin{cases} p = a_2(a_4)^{-\frac{1}{4}} \\ q = a_1(a_4)^{-\frac{1}{4}} \\ r = a_0 \end{cases} \tag{1.4.13}$$

当 $a_4<0$ 时，作如下变换

$$\begin{cases} w = (-a_4)^{\frac{1}{4}}u \\ \xi_1 = (-a_4)^{\frac{1}{4}}\xi \end{cases} \tag{1.4.14}$$

将式(1.4.14)代入式(1.4.9)得

$$w_{\xi_1}{}^2 = -F(w) = -(w^4 + pw^2 + qw + r) \tag{1.4.15}$$

其中

$$\begin{cases} p = -a_2(-a_4)^{-\frac{1}{4}} \\ q = -a_1(-a_4)^{-\frac{1}{4}} \\ r = -a_0 \end{cases} \tag{1.4.16}$$

由四阶多项式完全判别系统法，容易写出方程(1.4.12)九种情形下的解，从而写出 Medium Equal Width 方程的精确行波解，这里略.

4.3 正 Gardner 方程的精确解

考虑正 Gardner 方程[45,46]

$$u_t + 6uu_x + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.4.17}$$

首先作行波变换，$u=u(\xi)$，$\xi=kx+\omega t$，则方程(1.4.17)变成

$$\omega u' + 6kuu' + 6ku^2u' + k^3u''' = 0 \tag{1.4.18}$$

再积分式(1.4.18)两次得

$$(u')^2 = a_4u^4 + a_3u^3 + a_2u^2 + a_1u + a_0 \tag{1.4.19}$$

其中

$$\begin{cases} a_4 = -\dfrac{1}{2k^2} \\ a_3 = -\dfrac{2}{k^2} \\ a_2 = -\dfrac{\omega}{k^3} \end{cases} \tag{1.4.20}$$

这里 a_0,a_1 是任意常数. 当 $a_4>0$ 时，作如下变换

$$\begin{cases} w = (a_4)^{\frac{1}{4}}\left(u + \dfrac{a_3}{4a_4}\right) \\ \xi_1 = (a_4)^{\frac{1}{4}}\xi \end{cases} \tag{1.4.21}$$

将式(1.4.21)代入式(1.4.19)得

$$w_{\xi_1}{}^2 = F(w) = w^4 + pw^2 + qw + r \tag{1.4.22}$$

其中

$$\begin{cases} p = \dfrac{a_2}{\sqrt{a_4}} \\ q = \left(\dfrac{a_3^3}{8a_4^2} - \dfrac{a_2 a_3}{2a_4} + a_1\right)(a_4)^{-\frac{1}{4}} \\ r = \dfrac{-3a_3^4}{256a_4^3} + \dfrac{a_2 a_3^2}{16a_4^2} - \dfrac{a_1 a_3}{4a_4} + a_0 \end{cases} \tag{1.4.23}$$

当 $a_4<0$ 时,则作如下变换

$$\begin{cases} w = (-a_4)^{\frac{1}{4}}\left(u + \dfrac{a_3}{4a_4}\right) \\ \xi_1 = (-a_4)^{\frac{1}{4}}\xi \end{cases} \tag{1.4.24}$$

将式(1.4.24)代入式(1.4.19)得

$$w_{\xi_1}^{\ 2} = -F(w) = -(w^4 + pw^2 + qw + r) \tag{1.4.25}$$

其中

$$\begin{cases} p = \dfrac{-a_2}{\sqrt{-a_4}} \\ q = \left(-\dfrac{a_3^3}{8a_4^2} + \dfrac{a_2 a_3}{2a_4} - a_1\right)(-a_4)^{-\frac{1}{4}} \\ r = \dfrac{3a_3^4}{256a_4^3} - \dfrac{a_2 a_3^2}{16a_4^2} + \dfrac{a_1 a_3}{4a_4} - a_0 \end{cases} \tag{1.4.26}$$

要求解方程(1.4.19),首先求方程(1.4.22),方程(1.4.23)的解. 利用四阶多项式的完全判别系统法,有九种情形,如前例所述,这里略. 再由式(1.4.20)易写出方程(1.4.17)的精确行波解,它们是正 Gardner 方程的所有单行波解的分类,这里略.

4.4 非线性耦合标量场方程的精确解

考虑非线性耦合标量场方程[47-53,74]

$$\sigma_{xx} = -\sigma + \sigma^3 + dp^2\sigma \tag{1.4.27}$$

$$\rho_{xx} = f\rho + \lambda\rho^3 + d\rho(\sigma^2 - 1) \tag{1.4.28}$$

作行波变换,$\rho=\rho(x,t)=\rho(\xi)$,$\sigma=\sigma(x,t)=\sigma(\xi)$,$\xi=kx+\omega t$,$\rho=A\sigma+B$,将方程(1.4.27)和(1.4.28)约化为

$$\sigma''(\xi) = \frac{dA^2+1}{k^2}\sigma^3 + \frac{2ABd}{k^2}\sigma^2 + \frac{B^2d-1}{k^2}\sigma \tag{1.4.29}$$

$$\sigma''(\xi) = \frac{A^3\lambda + Ad}{Ak^2}\sigma^3 + \frac{3A^2B\lambda + Bd}{Ak^2}\sigma^2 + \frac{Af + 3AB^2\lambda - Ad}{Ak^2}\sigma + \frac{Bf + B^3\lambda - Bd}{Ak^2} \tag{1.4.30}$$

令式(1.4.29)和式(1.4.30)完全相等得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dA^2+1}{k^2}=\dfrac{A^3\lambda+Ad}{Ak^2}\\ \dfrac{B^2d-1}{k^2}=\dfrac{Af+3AB^2\lambda-Ad}{Ak^2}\\ \dfrac{2ABd}{k^2}=\dfrac{3A^2B\lambda+Bd}{Ak^2}\\ \dfrac{Bf+B^3\lambda-Bd}{Ak^2}=0\end{cases}\tag{1.4.31}$$

解式(1.4.31)得如下三组解.

解1 $f=d-1,\dfrac{d-1}{d-\lambda}>0$ 时

$$\begin{cases}A=\pm\sqrt{\dfrac{d-1}{d-\lambda}}\\ B=0\end{cases}\tag{1.4.32}$$

解2 $\lambda\neq 0,d>\dfrac{3}{2}$时

$$\begin{cases}A=\pm\sqrt{\dfrac{2d-3}{d}}\\ B=\pm\sqrt{\dfrac{1}{d}}\end{cases}\tag{1.4.33}$$

解3 $\lambda=0,d=2$ 时

$$\begin{cases}A=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ B=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\tag{1.4.34}$$

因此为求式(1.4.27)和式(1.4.28)的解,只需在式(1.4.32)或式(1.4.33)或式(1.4.34)的条件下求式(1.4.29)的解.由式(1.4.29)两边求积分得

$$(\sigma')^2=\frac{A^2d+1}{2k^2}\sigma^4+\frac{4ABd}{3k^2}\sigma^3+\frac{B^2d-1}{k^2}\sigma^2+C\tag{1.4.35}$$

这里 C 为积分常数.故要求解式(1.4.29)只需求解式(1.4.35).

首先,对于解1,即在条件式(1.4.32)下,令 $\sigma^2=u$,且将式(1.4.35)写成积分形式

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(a_4u^2+a_2u+C)}}=\pm 2(\xi-\xi_0)\tag{1.4.36}$$

其中,$a_4=\dfrac{d^2-\lambda}{2k^2(d-\lambda)},a_2=-\dfrac{1}{k^2}$.

根据二阶多项式完全判别系统法可知,方程(1.4.36)的所有解为

$$\sigma_1=\pm\sqrt{-\frac{a_2}{2a_4}\tanh^2\left[\sqrt{-\frac{a_2}{2}}(\xi-\xi_0)\right]}\quad a_2<0$$

$$\sigma_2=\pm\sqrt{-\frac{a_2}{2a_4}\coth^2\left[\sqrt{-\frac{a_2}{2}}(\xi-\xi_0)\right]}\quad a_2<0$$

$$\sigma_3=\pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}\tan^2\left[\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\xi-\xi_0)\right]}\quad a_2>0$$

$$\sigma_4=\pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}\tanh^2\left[\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\xi-\xi_0)\right]-a_2}\quad a_2>0$$

$$\sigma_5=\pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}\coth^2\left[\sqrt{\frac{a_2}{2}}(\xi-\xi_0)\right]-a_2}\quad a_2>0$$

$$\sigma_6=\pm\sqrt{-\frac{a_2}{2a_4}\tan^2\left[\sqrt{-\frac{a_2}{2}}(\xi-\xi_0)\right]-a_2}\quad a_2<0$$

$$\sigma_7=\pm\sqrt{\frac{1}{a_4}[\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2(\sqrt{\gamma-\alpha}(\xi-\xi_0),m)]}$$

其中,$m^2=\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

$$\sigma_8=\pm\sqrt{\frac{-\beta\mathrm{sn}^2(\sqrt{\gamma-\alpha}(\xi-\xi_0),m)+\gamma}{a_4\mathrm{cn}^2(\sqrt{\gamma-\alpha}(\xi-\xi_0),m)}}$$

$$\sigma_9=\pm\sqrt{\frac{1}{a_4}\left[\frac{2\sqrt{a_4C}}{1+\mathrm{cn}((a_4C)^{\frac{1}{4}}(\xi-\xi_0),m)}-\sqrt{a_4C}\right]}$$

其中,$m^2=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a_2}{2\sqrt{a_4C}}\right)$.

其次,考虑解 2,即在条件(1.4.33)下,则式(1.4.35)变为

$$(u')^2=r_4u^4+r_2u^2+r_1u+r_0\tag{1.4.37}$$

其中

$$\begin{cases}u=\sigma+\dfrac{b_3}{4b_4}\\ b_4=\dfrac{d-1}{k^2}\\ b_3=\pm\dfrac{4\sqrt{2d-3}}{3k^2}\\ r_4=b_4\\ r_2=-\dfrac{3b_3^{\ 2}}{8b_4}\\ r_1=\dfrac{b_3^{\ 3}}{8b_4^{\ 2}}\\ r_0=-\dfrac{3b_3^{\ 4}}{256b_4^{\ 3}}+C\end{cases}\tag{1.4.38}$$

若 $r_4>0$,则式(1.4.37)可写为

$$w_{\xi_1}^{\ 2}=F(w)=w^4+pw^2+qw+r\tag{1.4.39}$$

其中

$$\begin{cases} w = r_4^{\frac{1}{4}} u \\ \xi_1 = r_4^{\frac{1}{4}} \xi \\ p = \dfrac{r_2}{r_4^{\frac{1}{2}}} \\ q = \dfrac{r_1}{r_4^{\frac{1}{4}}} \\ r = r_0 \end{cases} \tag{1.4.40}$$

若 $r_4<0$，则式(1.4.37)可写为

$$w_{\xi_1}^{2} = -F(w) = -(w^4+pw^2+qw+r) \tag{1.4.41}$$

其中

$$\begin{cases} w = (-r_4)^{\frac{1}{4}} u \\ \xi_1 = (-r_4)^{\frac{1}{4}} \xi \\ p = \dfrac{-r_2}{(-r_4)^{\frac{1}{2}}} \\ q = \dfrac{-r_1}{(-r_4)^{\frac{1}{4}}} \\ r = -r_0 \end{cases} \tag{1.4.42}$$

利用四阶多项式 $F(w)=w^4+pw^2+qw+r$ 的完全判别系统法容易写出式(1.4.39)和式(1.4.41)的所有精确解的分类. 相应地由关系式(1.4.40)和式(1.4.42)即可写出式(1.4.37)的精确解，从而写出在条件(1.4.33)下的式(1.4.35)的精确解，这里略.

下面考虑解3，即在条件(1.4.34)下，式(1.4.35)变为

$$(u')^2 = p_4u^4+p_2u^2+p_1u+p_0 \tag{1.4.43}$$

其中，$u=\sigma+\dfrac{l_3}{4l_4}$，$p_4=l_4$，$p_2=-\dfrac{3l_3^2}{8l_4}$，$p_1=\dfrac{l_3^2}{8l_4^2}$，$l_4=\dfrac{1}{k^2}$，$l_3=\pm\dfrac{4}{3k^2}$，$p_0=-\dfrac{3b_3^4}{256bl_4^3}+C$.

故式(1.4.43)与式(1.4.37)的解的形式一样，为简单起见，略.

综上所述，我们得到了在条件(1.4.32)或(1.4.33)或(1.4.34)下的式(1.4.35)的精确解，相应地可写出非线性耦合标量场方程(1.4.27)和(1.4.28)的精确行波解，它们是该方程的所有单行波解的分类，这里略.

第5章　五阶多项式完全判别系统法及其应用

5.1　五阶多项式完全判别系统法

如果一个非线性数学物理方程,通过行波变换可以约化成以下微分方程

$$[w'(\xi)]^2 = F(w) = w^5 + pw^3 + qw^2 + rw + s \tag{1.5.1}$$

那么,只要我们给出方程(1.5.1)的所有解的分类,则该非线性数学物理方程的所有单行波解的分类就能给出. 根据五阶多项式 $F(w)$ 的完全判别系统式(1.1.5),方程(1.5.1)的所有解的分类有如下十二种情形.

情形1:$D_5=0, D_4=0, D_3>0, E_2\neq0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)^2(w-\beta)^2(w-\gamma)$,其中 α,β,γ 是实数,$\alpha\neq\beta\neq\gamma$. 当 $w>\gamma$ 时,方程(1.5.1)的解为

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0) = \sqrt{\gamma-\alpha}\arctan\frac{\sqrt{w-\gamma}}{\sqrt{\gamma-\alpha}} - \sqrt{\gamma-\beta}\arctan\frac{\sqrt{w-\gamma}}{\sqrt{\gamma-\beta}} \quad (\gamma>\alpha,\gamma>\beta)$$

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0) = \sqrt{\gamma-\alpha}\arctan\frac{\sqrt{w-\gamma}}{\sqrt{\gamma-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta-\gamma}}\times\ln\left|\frac{\sqrt{w-\gamma}-\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{w-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}\right| \quad (\gamma>\alpha,\gamma<\beta)$$

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0) = -\sqrt{\gamma-\beta}\arctan\frac{\sqrt{w-\gamma}}{\sqrt{\gamma-\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha-\gamma}}\times\ln\left|\frac{\sqrt{w-\gamma}-\sqrt{\alpha-\gamma}}{\sqrt{w-\gamma}+\sqrt{\alpha-\gamma}}\right| \quad (\gamma<\alpha,\gamma>\beta)$$

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha-\gamma}}\ln\left|\frac{\sqrt{w-\gamma}-\sqrt{\alpha-\gamma}}{\sqrt{w-\gamma}+\sqrt{\alpha-\gamma}}\right| - \frac{1}{2\sqrt{\beta-\gamma}}\times\ln\left|\frac{\sqrt{w-\gamma}-\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{w-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}\right| \quad (\gamma<\alpha,\gamma<\beta)$$

情形2:$D=0, D_4=0, D_3=0, D_2\neq0, F_2\neq0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)^3(w-\beta)^2$,其中 α,β 是实数,$\alpha\neq\beta$. 当 $w>\alpha$ 时,方程(1.5.1)的解为

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{w-\alpha}} - \sqrt{\alpha-\beta}\arctan\frac{\sqrt{w-\alpha}}{\sqrt{\alpha-\beta}} \quad (\alpha>\beta)$$

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0) = -\frac{1}{\sqrt{w-\alpha}} - \frac{1}{2\sqrt{\beta-\alpha}}\ln\left|\frac{\sqrt{w-\alpha}-\sqrt{\beta-\alpha}}{\sqrt{w-\alpha}+\sqrt{\beta-\alpha}}\right| \quad (\alpha<\beta)$$

情形3:$D=0, D_4=0, D_3=0, D_2\neq0, F_2=0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)^4(w-\beta)$,其中 α,β 是实数,$\alpha\neq\beta$. 当 $w>\alpha$ 时,方程(1.5.1)的解为

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0) = -\frac{\sqrt{w-\beta}}{2(w-\alpha)} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha-\beta}}\arctan\frac{\sqrt{w-\beta}}{\sqrt{\beta-\alpha}} \quad (\alpha<\beta)$$

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0) = -\frac{\sqrt{w-\alpha}}{2(w-\alpha)} - \frac{1}{4\sqrt{\alpha-\beta}}\ln\left|\frac{\sqrt{w-\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{w-\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}\right| \quad (\alpha>\beta)$$

情形4:$D=0, D_4=0, D_3=0, D_2=0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)^5$,其中 α 是实数. 当 $w>\alpha$ 时,

方程(1.5.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=-\frac{2}{3}(w-\alpha)^{-\frac{3}{2}}$$

情形5: $D_5=0,D_4=0,D_3<0,E_2\neq0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)(w^2+rw+s)^2$,其中 α 是实数, $r^2-4s<0$. 当 $w>\alpha$ 时, 方程(1.5.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=-\frac{2}{\rho\sqrt{4s-r^2}}\left(\cos\varphi\arctan\frac{2\rho\sin\varphi\sqrt{w-\alpha}}{w-\alpha-\rho^2}+\frac{\sin\varphi}{2}\ln\frac{w-\alpha-\rho^2-2\rho\cos\varphi\sqrt{w-\alpha}}{w-\alpha-\rho^2+2\rho\cos\varphi\sqrt{w-\alpha}}\right)$$

其中,$\rho=(\alpha^2+r\alpha+s)^{\frac{1}{4}},\varphi=\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{4s-r^2}}{-2\alpha-r}$.

情形6: $D_5=0,D_4>0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)^2(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)(w-\alpha_3)$,其中 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是实数,$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3$. 当 $w>\alpha$ 时,方程(1.5.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=-\frac{2}{(\alpha-\alpha_2)\sqrt{\alpha_2-\alpha_3}}\left\{F(\varphi,k)-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha}\prod\left(\varphi,\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha},k\right)\right\}$$

其中,$\alpha\neq\alpha_1,\alpha\neq\alpha_2,\alpha\neq\alpha_3,F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\prod(\varphi,n,k)=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

情形7:$D_5=0,D_4=0,D_3<0,E_2=0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)^3[(w-l_1)^2+s_1^2]$,其中 α,l_1,s_1 是实数。当 $w>\alpha$ 时,如果 $\alpha\neq l_1+s_1$, 方程(1.5.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=-\frac{\tan\theta+\cot\theta}{2(s_1\tan\theta-l_1-\alpha)\sqrt{\frac{s_1}{\sin^3 2\theta}}}F(\varphi,k)-\frac{s_1\tan\theta+s_1\cot\theta}{s_1\cot\theta+l_1+\alpha}\times$$

$$\left[\frac{\tan\theta+l_1+\alpha}{(s_1\cot\theta+l_1-\alpha)\sin\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+F(\varphi,k)-E(\varphi,k)\right]$$

如果 $\alpha=l_1+s_1$, 方程(1.5.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\sqrt{\frac{\sin^3 2\theta}{4s^3}}\left[\frac{1}{k}\arcsin(k\sin\varphi)-F(\varphi,k)\right]$$

其中,$\tan2\theta=\frac{s_1}{\alpha-l_1},k=\sin\theta,0<\theta<\frac{\pi}{2},E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$.

情形8: $D_5=0,D_4<0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)^2(w-\beta)[(w-l_1)^2+s_1^2]$, 其中 α,l_1,s_1 是实数. 当 $w>\beta$ 时, 如果 $\alpha\neq l_1-s_1\tan\theta,\alpha\neq l_1+s_1\cot\theta$, 方程(1.5.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=-\frac{\tan\theta+\cot\theta}{2(s_1\tan\theta-l_1-\alpha)\sqrt{\frac{s_1}{\sin^3 2\theta}}}F(\varphi,k)-\frac{s_1\tan\theta+s_1\cot\theta}{s_1\cot\theta+l_1+\alpha}\times$$

$$\left[\frac{\tan\theta+l_1+\alpha}{(s_1\cot\theta+l_1-\alpha)\sin\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+F(\varphi,k)-E(\varphi,k)\right]$$

如果 $\alpha=l_1-s_1\tan\theta$, 方程(1.5.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\sqrt{\frac{\sin^3 2\theta}{4s^3}}\left[\frac{1}{k}\arcsin(k\sin\varphi)-F(\varphi,k)\right]$$

如果 $\alpha=l_1+s_1\cot\theta$, 方程(1.5.1)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\sqrt{\frac{\sin^3 2\theta}{4s^3}}\left[F(\varphi,k)-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+\sqrt{1-k^2}\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]$$

其中，$\tan 2\theta=\frac{s_1}{\beta-l_1}, k=\sin\theta, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

情形 9：$D_5=0, D_4=0, D_3>0, E_2=0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha)^3(w-\beta)(w-\gamma)$，其中，$\alpha,\beta,\gamma$ 是实数. 当 $w>\alpha>\beta>\gamma$ 时，方程(1.5.1)的解为

$$\pm\frac{\alpha-\beta}{2}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{\alpha-\gamma}}E\left(\arcsin\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{w-\gamma}},\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}\right)-\sqrt{\frac{w-\beta}{(w-\gamma)(w-\alpha)}}$$

其他的类似情形，比如 $w>\beta>\alpha>\gamma$ 等，也可以给出类似的解，这里略.

情形 10：$D_5>0, D_4>0, D_3>0, D_2>0$. 则有 $F(w)=(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)(w-\alpha_3)(w-\alpha_4)(w-\alpha_5)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 是实数. 这时相应的解可表示如下

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{dw}{\sqrt{(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)(w-\alpha_3)(w-\alpha_4)(w-\alpha_5)}}$$

情形 11：$D_5<0$，则有 $F(w)=(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)(w-\alpha_3)[(w-l_1)^2+s_1^2]$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,l_1,s_1$ 是实数. 这时相应的解可表示如下

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{dw}{\sqrt{(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)(w-\alpha_3)[(w-l_1)^2+s_1^2]}}$$

情形 12：$D_5>0\wedge(D_4\leqslant 0\vee D_3\leqslant 0, D_2\leqslant 0)$，这里 $\wedge$ 表示"并且"，$\vee$ 表示"或者"，则有 $F(w)=(w-\alpha_1)[(w-l_1)^2+s_1^2][(w-l_2)^2+s_2^2]$，其中 α_1,l_1,s_1,l_2,s_2 是实数. 这时相应的解可表示如下

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{dw}{\sqrt{(w-\alpha_1)[(w-l_1)^2+s_1^2][(w-l_2)^2+s_2^2]}}$$

5.2 带有四阶非线性项的 $D+1$ 维 Klein – Gordon 方程的精确解

考虑带有四阶非线性项的 $D+1$ 维 Klein – Gordon 方程[38]

$$\sum_{i=1}^{D}u_{x_ix_i}-u_{tt}=\sum_{j=0}^{4}b_ju^j \tag{1.5.2}$$

作行波变换，$u=u(\xi_1), \xi_1=\sum_{i=1}^{D}k_ix_i+\omega t$，则方程(1.5.2)变为

$$(u')^2=a_0+\sum_{i=1}^{5}a_iu^i \tag{1.5.3}$$

其中，a_0 是积分常数，$a_i=\frac{2b_i}{(i+1)\left(\sum_{i=1}^{D+1}k_i^2-\omega^2\right)}$.

再作变换，$w=a_5^{\frac{1}{5}}u+\frac{4}{5}a_4a_5^{-\frac{4}{5}}, \xi=a_5^{\frac{1}{5}}\xi_1$，则方程(1.5.3)变成

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{dw}{\sqrt{w^5+pw^3+qw^2+rw+s}} \tag{1.5.4}$$

其中，$p=\frac{16}{5}a_4^2a_5^{-\frac{8}{5}}+a_3a_5^{-\frac{3}{5}}$，$q=-\frac{32}{25}a_4^3a_5^{-\frac{12}{5}}+(a_2-3a_3)a_5^{-\frac{2}{5}}$，$r=\frac{256}{125}a_4^4\left(a_5^{-4}-a_5^{-\frac{16}{5}}\right)+\frac{48}{25}a_3a_4^2a_5^{-\frac{11}{5}}-\frac{8}{5}a_2a_4a_5^{-\frac{6}{5}}+a_1a_5^{-\frac{1}{5}}$，$s=\frac{256}{3125}a_4^5a_5^{-4}-\frac{48}{25}a_3a_4^3a_5^{-3}+\frac{16}{25}a_2a_4^2a_5^{-2}-\frac{4}{5}a_1a_4a_5^{-1}+a_0$.

根据五阶多项式完全判别系统法，可以给出方程(1.5.4)的所有解的分类，相应地可以写出带有四阶非线性项的 $D+1$ 维 Klein – Gordon 方程的精确行波解，它们是该方程的所有单行波解的分类，这里略.

5.3　带有任意阶非线性项的混合 KdV 方程的精确解

考虑带有任意阶非线性项的混合 KdV 方程[54-61]

$$u_t + du^p u_x + bu^{2p}u_x + \delta u_{xxx} = 0 \qquad (d,b,\delta,p = \text{const.}, p>0, \delta \neq 0) \tag{1.5.5}$$

作行波变换，$u=u(\xi)$，$\xi = x - vt$，将方程(1.5.5)约化为

$$-vu'(\xi) + du^p(\xi) + bu^{2p}u'(\xi) + \delta u'''(\xi) = 0 \tag{1.5.6}$$

将方程(1.5.6)积分一次得

$$u''(\xi) - \frac{v}{\delta}u(\xi) + \frac{d}{\delta(p+1)}u^{p+1}(\xi) + \frac{b}{\delta(2p+1)}u^{2p+1}(\xi) = c_1 \tag{1.5.7}$$

这里 c_1 是一个积分常数.

为求解方程(1.5.5)，这里只需求解方程(1.5.7). 将方程(1.5.7)积分一次得

$$(u')^2 = p_1u^2 + p_2u^{p+2} + p_3u^{2p+2} + c_1u + c_2 \tag{1.5.8}$$

其中

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{v}{\delta} \\ p_2 = -\dfrac{2d}{\delta(p+1)(p+3)} \\ p_3 = -\dfrac{2b}{\delta(2p+1)(2p+2)} \\ c_1, c_2 \text{ 是积分常数} \end{cases} \tag{1.5.9}$$

原则上，根据多项式的完全判别系统，方程(1.5.8)的所有可能的解都可以得到，这些解可以用初等函数、椭圆函数和超椭圆积分表示. 下面根据积分常数 c_1 和 c_2 分四种情形来讨论方程(1.5.8)的解. 为简单起见，在下面的情形 2 ~ 4 中，将 p 取某些特殊值进行讨论.

情形 1： $c_1 = c_2 = 0$. 方程(1.5.8)变成

$$(u')^2 = p_1u^2 + p_2u^{p+2} + p_3u^{2p+2} \tag{1.5.10}$$

作变换

$$w = u^p(\xi) \tag{1.5.11}$$

将方程(1.5.11)代入方程(1.5.10)得

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{w\sqrt{p_1 + p_2w + p_3w^2}} = \pm p(\xi - \xi_0) \tag{1.5.12}$$

令 $\Delta = p_2^2 - 4p_1p_3$，这里 Δ 是多项式 $p_1 + p_2w + p_3w^2$ 的判别式. 根据二阶多项式完全判别系统法，式(1.5.12)的所有解的分类有以下三种情形.

情形 1.1： $\Delta = 0$. 由式(1.5.12)得

$$\pm\frac{pp_2}{2p_3}\sqrt{|p_3|}(\xi - \xi_0) = \ln\left|\frac{w - \dfrac{p_2}{2p_3}}{w}\right|$$

情形 1.2： $\Delta > 0$. 当 $p_3 > 0$ 时，由式(1.5.12)得

$$\pm\sqrt{p_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{(-\gamma)(w-\beta)}-\sqrt{(-\beta)(w-\gamma)}]^2}{|w|}$$

$$\pm\sqrt{p_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{\gamma(w-\beta)}-\sqrt{\beta(w-\gamma)}]^2}{|w|}$$

$$\pm\sqrt{p_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{-\beta\gamma}}\arcsin\frac{(-\gamma)(w-\beta)+(-\beta)(w-\gamma)}{|w||\beta-\gamma|}$$

当 $p_3<0$ 时，由式(1.5.12)得

$$\pm\sqrt{-p_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{-\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{(-\gamma)(w+\beta)}-\sqrt{\beta(w-\gamma)}]^2}{|w|}$$

$$\pm\sqrt{-p_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{-\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{\gamma(-w+\beta)}-\sqrt{(-\beta)(w-\gamma)}]^2}{|w|}$$

$$\pm\sqrt{-p_3}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\arcsin\frac{[\sqrt{(-\gamma)(w+\beta)}-\sqrt{\beta(w-\gamma)}]^2}{|w|}$$

上面表达式中根号内部分都大于零，其中 $\beta=\frac{-p_2+\sqrt{\Delta}}{2p_3},\gamma=\frac{-p_2-\sqrt{\Delta}}{2p_3}$.

情形 1.3：$\Delta<0$,由式(1.5.12)得

$$\pm\sqrt{p_1}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{p_1^2+s^2}}\ln\left|\frac{-\frac{1}{2p_2\sqrt{p_1}}w+\sqrt{p_1}-\sqrt{p_3w^2-p_2w+p_1}}{w}\right|\quad(p_1>0)$$

注：以上用多项式完全判别系统得到的解，Feng[55] 曾得到，但这里的方法更简单,更直接.

情形 2：$c_1=0,c_2\neq0$. 对于方程(1.5.8)，原则上可以用多项式完全判别系统对多项式的根进行分类，从而求出相应的积分. 但是六阶及高于六阶的多项式的完全判别系统比较复杂. 为简单起见，下面仅取 $p=4$ 作为例子来说明这个方法.

例：$p=4$. 由方程(1.5.8)得

$$(u')^2=p_1u^2+p_2u^6+p_3u^{10}+c_2\tag{1.5.13}$$

作变换

$$w=u^2(\xi)\tag{1.5.14}$$

将方程(1.5.14)代入方程(1.5.13)得

$$\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{Awf(w)}}=\pm(\xi-\xi_0)\tag{1.5.15}$$

其中

$$\begin{cases}f(w)=w^5+qw^3+rw+s.\\ q=\dfrac{p_2}{p_3}\\ r=\dfrac{p_1}{p_3}\\ s=\dfrac{c_2}{p_3}\\ A=4p_3\end{cases}\tag{1.5.16}$$

利用五阶多项式$f(w)$的完全判别系统法，方程(1.5.15)的解有以下七种情况.

情形2.1：$D_5=0,D_4=0,D_3>0,E_2\neq 0$. 下面是几个相应的解的形式(参数条件应满足相应的公式，很容易写出来，为简单起见，这里略).

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{1}{\sqrt{A\alpha(\alpha-\gamma)}}\ln\frac{[\sqrt{\varepsilon_1Aw(\alpha-\gamma)}-\sqrt{\varepsilon_1A\alpha(w-\gamma)}]^2}{|w-\alpha|}-\frac{1}{\sqrt{-A\beta(\beta-\gamma)}}\arcsin\frac{Aw(\beta-\gamma)+A\beta(w-\gamma)}{|A\gamma(w-\beta)|}\right\}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{1}{\sqrt{A\alpha(\alpha-\gamma)}}\ln\frac{[\sqrt{\varepsilon_1Aw(\alpha-\gamma)}-\sqrt{\varepsilon_1A\alpha(w-\gamma)}]^2}{|w-\alpha|}-\frac{1}{\sqrt{A\beta(\beta-\gamma)}}\ln\frac{[\sqrt{\varepsilon_2Aw(\beta-\gamma)}-\sqrt{\varepsilon_2A\beta(w-\gamma)}]^2}{|w-\beta|}\right\}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{1}{\sqrt{-A\alpha(\alpha-\gamma)}}\arcsin\frac{Aw(\alpha-\gamma)+A\alpha(w-\gamma)}{|A\gamma(w-\alpha)|}-\frac{1}{\sqrt{A\beta(\beta-\gamma)}}\ln\frac{[\sqrt{\varepsilon_2Aw(\beta-\gamma)}-\sqrt{\varepsilon_2A\beta(w-\gamma)}]^2}{|w-\beta|}\right\}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{\sqrt{-A\alpha(\alpha-\gamma)}}\arcsin\frac{Aw(\alpha-\gamma)+A\alpha(w-\gamma)}{|A\gamma(w-\alpha)|}-\frac{1}{\sqrt{-A\beta(\beta-\gamma)}}\arcsin\frac{Aw(\beta-\gamma)+A\beta(w-\gamma)}{|A\gamma(w-\beta)|}\right]$$

这里$\varepsilon_1=\pm1,\varepsilon_2=\pm1$.

情形2.2：$D_5=0,D_4=0,D_3=0,D_2\neq0,F_2\neq0$. 方程(1.5.15)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[-\frac{2}{A\alpha}\sqrt{\frac{Aw}{w-\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{-A\beta(\beta-\alpha)}}\arcsin\frac{Aw(\beta-\alpha)+A\beta(w-\alpha)}{|A\alpha(v-\beta)|}\right]$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{-\frac{2}{A\alpha}\sqrt{\frac{Aw}{w-\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{A\beta(\beta-\alpha)}}\ln\frac{[\sqrt{\varepsilon_2Aw(\beta-\alpha)}-\sqrt{\varepsilon_2A\beta(w-\alpha)}]^2}{|w-\beta|}\right\}$$

这里$\varepsilon_2=\pm1$.

情形2.3：$D_5=0,D_4=0,D_3=0,D_2\neq0,F_2=0$. 方程(1.5.15)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{-1}{A\alpha(\alpha-\beta)}\left\{\frac{\sqrt{Aw(w-\beta)}}{w-\alpha}+A\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)\times\frac{1}{\sqrt{A\alpha(\alpha-\beta)}}\ln\frac{[\sqrt{\varepsilon_2Aw(\alpha-\beta)}-\sqrt{\varepsilon_2A\alpha(w-\beta)}]^2}{|w-\alpha|}\right\}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{-1}{A\alpha(\alpha-\beta)}\left[\frac{\sqrt{Aw(w-\beta)}}{w-\alpha}+A\left(\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)\frac{1}{\sqrt{-A\alpha(\alpha-\beta)}}\arcsin\frac{Aw(\alpha-\beta)+A\alpha(w-\beta)}{|A\beta(w-\alpha)|}\right]$$

这里 $\varepsilon_2 = \pm 1$.

情形2.4：$D_5=0, D_4=0, D_3<0, E_2\neq 0$. 相应地，方程(1.5.15)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{\beta_1}{\alpha\rho^2}\left[\arctan\frac{s}{w-l}+\arctan\frac{\gamma_2(w-l)+\delta_2}{\gamma_1(w-l)+\delta_1-\sqrt{Aw(w-\alpha)}}\right]+$$

$$\frac{\beta_2}{2\alpha\rho^2}\ln\left|\frac{(w-l)^2+s^2}{[\gamma_1(w-l)+\delta_1-\sqrt{Aw(w-\alpha)}]^2+[\gamma_2(w-l)+\delta_2]^2}\right|$$

其中，$\beta_1=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{2}[Al(l-\alpha)-As^2]}$，$\beta_2=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{2}[Al(l-\alpha)-As^2]}$，$\rho^2=\sqrt{4\left[\frac{A}{2}(2l-\alpha)s\right]^2+[Al(l-\alpha)-As^2]^2}$，$\gamma_1=\frac{1}{\rho^2}\left[As\beta_2+A\left(l-\frac{s}{2}\right)\beta_1\right]$，$\gamma_2=\frac{1}{\rho^2}\left[As\beta_2-A\left(l-\frac{s}{2}\right)\beta_1\right]$，$\delta_1=\frac{1}{\rho^2}\left[Al(l-\alpha)\beta_1+A\left(l-\frac{s}{2}\right)s\beta_2\right]$，$\delta_2=\frac{1}{\rho^2}\left[-Al(l-\alpha)\beta_2+A\left(l-\frac{s}{2}\right)s\beta_1\right]$，这里 β_1 和 β_2 的符号必须满足 $\beta_1\beta_2=sA\left(l-\frac{\alpha}{2}\right)$.

情形2.5：$D_5=0, D_4>0$. 方程(1.5.15)的解可以用如下椭圆积分表示

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{2\delta}{(a-\alpha c)\gamma}\left\{cF(\varphi,k)+\frac{\delta}{b-\alpha d}\Pi\left(\varphi,\frac{a-\alpha c}{b-\alpha d},k\right)\right\}$$

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 0 的次序被重新排列，且 $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4$. 当 $A>0, w\geqslant\alpha_1$ 或 $w\leqslant\alpha_4$ 时(其他情况可以类似写出，这里略)，方程中每个参数的意义如下：$a=\alpha_2(\alpha_1-\alpha_4)$，$b=-\alpha_1(\alpha_2-\alpha_4)$，$c=\alpha_1-\alpha_4$，$d=\alpha_2-\alpha_4$，$\delta=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_4)$，$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{|A|(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}$，$k^2=\frac{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$，$F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$，$\Pi(\varphi,n,k)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

情形2.6：$D_5=0, D_4=0, D_3>0, E_2=0$. 方程(1.5.15)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{-2c}{k^2\gamma}[(c+k^2d)F(\varphi,k)-cE(\varphi,k)] \qquad (\alpha_1=\alpha)$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{2d}{\gamma}\left[(c+d)F(\varphi,k)-dE(\varphi,k)-d\cot\!\text{an}\,(\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi})\right] \qquad (\alpha_2=\alpha)$$

这里的每个记号都与情形2.5中的相同，而且 $E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$.

情形2.7：$D_5=0, D_4=0, D_3<0, E_2=0$. 方程(1.5.15)的解为

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{cd}{\gamma}F(\varphi,k)+\frac{c^2}{k\gamma}\arcsin(k\sin\varphi) \qquad (\alpha_1=\alpha)$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{-d^2}{\gamma\sqrt{1-k^2}}\ln\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+\sqrt{1-k^2}\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{cd}{\gamma}F(\varphi,k) \qquad (\alpha_2=\alpha)$$

其中，$a=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)c-\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)d$，$b=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)d-\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)c$，$c=\alpha_1-l-\frac{s}{m_1}$，$d=\alpha_1-l-sm_1$，$E=\frac{s^2+(\alpha_1-l)(\alpha_2-l)}{s(\alpha_1-\alpha_2)}$，$m_1=E\pm\sqrt{E^2+1}$，$m^2=\frac{1}{1+m_1{}^2}$，并且 m_1 的正号和负号必须满足 $Am_1<0$，其他符号都与前面的相同.

情形3：$c_1 \neq 0, c_2 = 0$. 因为同样原因，取 $p=2$ 作为例子. 由方程(1.5.8)，有

$$(u')^2 = (p_1 u + p_2 u^3 + p_3 u^5 + c_1) u \tag{1.5.17}$$

将方程(1.5.17)积分一次得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A_1 u f(u)}} = \pm (\xi - \xi_0) \tag{1.5.18}$$

其中

$$\begin{cases} f(u) = u^5 + q_1 u^3 + r_1 u + s_1 \\ A_1 = p_3 \\ q_1 = \dfrac{p_2}{p_3} \\ r_1 = \dfrac{p_1}{p_3} \\ s_1 = \dfrac{c_1}{p_3} \end{cases} \tag{1.5.19}$$

方程(1.5.18)与方程(1.5.15)有相同的形式，方程(1.5.19)与方程(1.5.16)有相同的形式，所以很容易写出方程(1.5.18)的精确解，这些解由初等函数和椭圆函数表达. 为简单起见，这里略.

注：情形2和情形3中的所有解都是新解. 其他还有几种情形，相应的解由超椭圆积分表示，这里省略了.

5.4 不带耗散项的广义KP方程的精确解

考虑不带耗散项的广义KP方程[75,76]

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + d u^p u_x + b u^{2p} u_x + \delta u_{xxx}) + 3k^2 u_{yy} = 0 \quad (\delta \neq 0, p > 0) \tag{1.5.20}$$

作行波变换，$u = u(\xi), \xi = x + ly - vt$，将方程(1.5.20)约化为

$$-vu'' + d(u^p u')' + b(u^{2p} u')' + \delta u^{(4)} + 3k^2 l^2 u'' = 0 \tag{1.5.21}$$

将方程(1.5.21)积分两次，且令第一次积分常数为零，得

$$u'' = -\frac{b}{\delta(2p+1)} u^{2p+1} - \frac{d}{\delta(p+1)} u^{p+1} + \left(\frac{v}{\delta} - \frac{3k^2 l^2}{\delta}\right) u + c_1 \tag{1.5.22}$$

其中，c_1 是积分常数. 再将式(1.5.22)积分一次，得到

$$(u')^2 = p_3 u^{2p+2} + p_2 u^{p+2} + p_1 u^2 + c_1 u + c_2 \tag{1.5.23}$$

其中，$p_1 = \frac{v}{\delta} - \frac{3k^2 l^2}{\delta}$，$p_2 = -\frac{2d}{\delta(p+1)(p+2)}$，$p_3 = -\frac{b}{\delta(2p+1)(p+1)}$，$c_1$，$c_2$ 是积分常数.

这里我们只考虑一种情形，即当 $c_1 = 0$，$c_2 \neq 0$ 时，且令 $p=4$，则方程(1.5.23)变成

$$(u')^2 = p_1 u^2 + p_2 u^6 + p_3 u^{10} + c_2 \tag{1.5.24}$$

作变换，$w = u^2(\xi)$，则方程(1.5.24)写成积分形式为

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{Awf(w)}} = \pm (\xi - \xi_0) \tag{1.5.25}$$

其中,$f(w)=w^5+qw^3+rw+s$, $q=\frac{p_2}{p_3}, r=\frac{p_1}{p_3}, s=\frac{c_2}{p_3}, A=4p_3$.

利用五阶多项式完全判别系统法,可易求式(1.5.25)的所有解的分类,从而得到 $p=4$ 时方程(1.5.20)的精确行波解,这里略.



第 2 编　试探方程法及其应用

如果一个非线性数学物理方程经行波变换及积分后，不能直接约化成一个初等积分形式，那么我们可以考虑用试探方程法[27-29,34,77]求其精确解. 在这一部分，我们首先回顾不同形式的试探方程法，然后给出它们在若干非线性数学物理方程上的应用. 试探方程法的基本思想，就是假设解满足一个能化成积分方程形式的试探方程，进而得到所求方程的精确解. 虽然用这种方法求得的精确解不是该方程的所有单行波解的分类，但也常常包含其他方法得不到的新解. 对于不同类型的非线性微分方程，比如秩齐次和秩非齐次方程情形，以及具体的不同形式的秩齐次方程、秩非齐次方程，试探方程法的具体步骤都会有所不同. 在这一部分，分别介绍七种试探方程法的具体步骤，并给出相应的应用. 下面首先说明秩的概念[104]，从而说明什么是秩齐次非线性方程以及秩非齐次非线性方程.

设非线性发展方程的一般形式

$$P(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tt},\cdots)=0, \tag{2.1}$$

其中，P 是关于变元 $u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tt},\cdots$ 的多项式.

在行波变换 $u(x,t)=u(\xi),\xi=k(x-ct)$ 下，式(2.1)约化为如下的常微分方程

$$O(u,u',u'',u''',\cdots)=0 \tag{2.2}$$

其中，u' 为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$. 式(2.2)中任何一项可用下列通式表示(不考虑其系数)为 $u^{k_0}(u')^{k_1}(u'')^{k_2}\cdots(u^{(m)})^{k_m}$，其中，$k_j$ 是实常数($j=0,1,\cdots,m$)，于是可定义该项的秩为 $0k_0+1k_1+2k_2+\cdots+mk_m$.

实际上就是该项中 u 的各阶导数与其相应幂次乘积之和(可以认为 u 为自身的零阶导数). 有了秩的概念，我们就可以把所研究的非线性方程分为两类：一类叫做秩齐次方程，即各项的秩的取值要么全是偶数要么全是奇数；另一类叫做秩非齐次方程，即各项的秩的取值为奇数与偶数混合的.

第 1 章　秩齐次方程的多项式试探方程法及其应用

1.1　秩齐次方程的多项式试探方程法的主要步骤

如果一个非线性数学物理方程，能约化成一般的秩齐次非线性微分方程，我们可以用这个方法求其精确解，其具体步骤如下.

第一步：对于所考虑的非线性方程

$$N(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0 \tag{2.1.1}$$

作行波变换，$u(x,t)=u(\xi),\xi=kx+\omega t$，将方程(2.1.1)约化为

$$M(u,u',u'',\cdots)=0 \tag{2.1.2}$$

第二步:取试探方程

$$u''=\sum_{i=0}^{m}a_iu^i \tag{2.1.3}$$

其中,系数为常数. 由式(2.1.3)可导出

$$(u')^2=F(u)=\sum_{i=0}^{m}\frac{2a_i}{i+1}u^{i+1}+d \tag{2.1.4}$$

以及u'''等其他导数项, 这里d是积分常数. 将这些项代入式(2.1.2)中,得到一个u的多项式$G(u)$. 根据平衡原则能确定m的值. 令$G(u)$的系数都是零,得到一个非线性代数方程组. 解这个方程组可确定$a_0,\cdots,a_m$和d的值.

第三步:将方程(2.1.4)化成初等积分形式

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{F(u)}} \tag{2.1.5}$$

利用$m+1$阶多项式的完全判别系统法,解出式(2.1.5),进而得到方程(2.1.1)的形如式(2.1.2)的精确解.

1.2 1+1 维 Camassa - Holm 方程的精确解

考虑1+1维 Camassa - Holm 方程[78,67]

$$u_t+2ku_x+3uu_x-u_{xxx}=2u_xu_{xx}+uu_{xxx} \tag{2.1.6}$$

作行波变换,$u=u(\xi)$,$\xi=ly+\omega t$, 再积分一次, 则方程(2.1.6)成为

$$l^3\left[(u+1)u''+\frac{1}{2}(u')^2\right]=\frac{3l}{2}u^2+(\omega+2kl)u+c \tag{2.1.7}$$

其中,C为积分常数. 根据秩齐次方程的多项式试探方程法的步骤,取试探方程为

$$u''=Au+B \tag{2.1.8}$$

由方程(2.1.8)知

$$(u')^2=Au^2+2Bu+C \tag{2.1.9}$$

将方程(2.1.8)和方程(2.1.9)代入到方程(2.1.7)得到一个多项式方程

$$\left(\frac{3}{2}Al^3-\frac{3}{2}l\right)u^2+[l^3(A+2B)-\omega-2kl]u+l^3\left(B+\frac{C}{2}\right)-c=0 \tag{2.1.10}$$

为了确定参数A,B和C,令方程(2.1.10)中系数都为零,得非线性代数方程组,即

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}Al^3-\dfrac{3}{2}l=0\\ l^3(A+2B)-\omega-2kl=0\\ l^3\left(B+\dfrac{C}{2}\right)-c=0\end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases}A=\dfrac{1}{l^2}\\ B=\dfrac{\omega+(2k-1)l}{2l^3}\\ C=\dfrac{2c-\omega-(2k-1)l}{l^3}\end{cases} \tag{2.1.11}$$

在条件(2.1.11)下，根据二阶多项式完全判别系统法容易求出方程(2.1.9)的所有解的分类，从而得到1+1维 Camassa-Holm 方程的精确行波解为

$$u_1 = \pm \exp[\pm\sqrt{A}(\xi-\xi_0)] - \frac{B}{A}$$

$$u_2 = \frac{1}{A}\left\{\pm \operatorname{sech}[\pm\sqrt{A}(\xi-\xi_0)] - B\right\} \quad (A>0)$$

$$u_3 = \frac{1}{A}\left\{\pm\sqrt{B^2-AC}\sin[\pm\sqrt{A}(\xi-\xi_0)] - B)\right\} \quad (A<0)$$

1.3　Tzizeica-Dodd-Bullough 方程的精确解

考虑 Tzizeica-Dodd-Bullough 方程[79]

$$u_{xt} = e^{-u} + e^{-2u} \tag{2.1.12}$$

先作变换，$w=e^{-u}$，$u(x,t)=-\ln w(x,t)$，则方程(2.1.12)变成

$$-ww_{xt} + w_x w_t - w^3 - w^4 = 0 \tag{2.1.13}$$

再作行波变换，$w(x,t)=w(\xi)$，$\xi=x-ct$，将方程(2.1.13)约化成

$$cww'' - c(w')^2 - w^3 - w^4 = 0 \tag{2.1.14}$$

按照秩齐次方程的多项式试探方程法，取试探方程

$$w'' = F(w) = a_0 + a_1 w + \cdots + a_m w^m \tag{2.1.15}$$

将方程(2.1.15)积分一次得

$$(w')^2 = 2a_0 w + a_1 w^2 + \cdots + \frac{2}{m+1}a_m w^{m+1} + d \tag{2.1.16}$$

其中，d 为积分常数.

将式(2.1.15)，式(2.1.16)代入方程(2.1.14)，并根据平衡原则，可以确定 $m=3$，则方程(2.1.15)变为

$$w'' = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 \tag{2.1.17}$$

将方程(2.1.17)积分一次得

$$(w')^2 = \frac{1}{2}a_3 w^4 + \frac{2}{3}a_2 w^3 + a_1 w^2 + 2a_0 w + d \tag{2.1.18}$$

并得到

$$r_4 w^4 + r_3 w^3 + r_2 w^2 + r_1 w + r_0 = 0 \tag{2.1.19}$$

其中，$r_4=\frac{1}{2}a_3 c-1$，$r_3=\frac{1}{3}ca_2-1$，$r_2=-ca_1+ca_1$，$r_1=-2ca_0+ca_0$，$r_0=-cd$.

为确定 a_3,a_2,a_1,a_0,d 的值，令 $r_i=0, i=0,\cdots,4$，得到一个代数方程组，解之得 $a_3=\frac{2}{c}$，$a_2=\frac{3}{c}$，$a_0=0$，$d=0$，a_1 为任意实数.

将此时的式(2.1.18)写成积分形式

$$\int \frac{dw}{w\sqrt{p_3 w^2 + p_2 w + p_1}} = \pm(\xi-\xi_0) \tag{2.1.20}$$

其中

$$\begin{cases} p_3 = \dfrac{1}{2}a_3 \\ p_2 = \dfrac{2}{3}a_2 \\ p_1 = a_1 \end{cases} \tag{2.1.21}$$

根据二阶多项式完全判别系统法,可知方程(2.1.20)的所有解的分类有以下三种情形.

情形1: $\Delta=0$. 当 $p_3>0$ 时, 由方程(2.1.20)得

$$\pm \frac{p_2}{2p_3}\sqrt{|p_3|}(\xi-\xi_0) = \ln\left|\frac{w-\dfrac{p_2}{2p_3}}{w}\right| \tag{2.1.22}$$

情形2: $\Delta>0$. 当 $p_3>0$ 时, 由方程(2.1.20)得

$$\pm\sqrt{p_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{(-\gamma)(w-\beta)}-\sqrt{(-\beta)(w-\gamma)}]^2}{|w|} \tag{2.1.23}$$

$$\pm\sqrt{p_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{\gamma(w-\beta)}-\sqrt{\beta(w-\gamma)}]^2}{|w|} \tag{2.1.24}$$

$$\pm\sqrt{p_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{-\beta\gamma}}\arcsin\frac{(-\gamma)(w-\beta)+(-\beta)(w-\gamma)}{|w||\beta-\gamma|} \tag{2.1.25}$$

当 $p_3<0$ 时, 由方程(2.1.20)得

$$\pm\sqrt{-p_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{-\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{(-\gamma)(w+\beta)}-\sqrt{\beta(w-\gamma)}]^2}{|w|} \tag{2.1.26}$$

$$\pm\sqrt{-p_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{-\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{\gamma(-w+\beta)}-\sqrt{(-\beta)(w-\gamma)}]^2}{|w|} \tag{2.1.27}$$

$$\pm\sqrt{-p_3}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\arcsin\frac{[\sqrt{(-\gamma)(w+\beta)}-\sqrt{\beta(w-\gamma)}]^2}{|w|} \tag{2.1.28}$$

这里假设表达式(2.1.26)~(2.1.28)中根号内部分都大于零, 其中 $\beta=\dfrac{-p_2+\sqrt{\Delta}}{2p_3}$, $\gamma=\dfrac{-p_2-\sqrt{\Delta}}{2p_3}$.

情形3: $\Delta<0$. 由方程(2.1.20)得

$$\pm\sqrt{p_1}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{p_1^2+s^2}}\ln\left|\frac{-\dfrac{1}{2p_2\sqrt{p_1}}w+\sqrt{p_1}-\sqrt{p_3w^2-p_2w+p_1}}{w}\right| \quad (p_1>0) \tag{2.1.29}$$

这样方程(2.1.20)的所有可能的解的分类为式(2.1.22)~(2.1.29). 这样容易写出Tzizeica-Dodd-Bullough方程(2.1.12)的精确行波解, 这里略.

1.4　2+1维 Sine-Gordon 方程的精确解

考虑2+1维 Sine-Gordon 方程[105]

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}+m^2\sin u=0 \tag{2.1.30}$$

作变换，$v=e^{iu}$，$v(x,t)=V(\xi)$，$\xi=x+dy+ct$，将方程(2.1.30)化成

$$2(c^2-d^2-1)[VV''+(V')^2]+m^2(V^3-V)=0 \tag{2.1.31}$$

按照秩齐次方程的多项式试探方程法，取试探方程

$$V''=a_0+a_1V+a_2V^2 \tag{2.1.32}$$

积分得

$$(V')^2=\frac{2}{3}a_2V^3+a_1V^2+2a_0V+D \tag{2.1.33}$$

将式(2.1.32)，(2.1.33)代入式(2.1.31)，得到

$$r_3u^3+r_2u^2+r_1u+r_0=0 \tag{2.1.34}$$

其中，$r_3=\frac{10}{3}(c^2-d^2-1)a_2+m^2$，$r_2=4(c^2-d^2-1)a_1$，$r_1=6(c^2-d^2-1)a_0-m^2$，$r_0=2(c^2-d^2-1)D$.

为确定 a_2,a_1,a_0,D 的值，令 $r_i=0$，$i=0,\cdots,3$，得到一个代数方程组. 解之有

$$\begin{cases} a_2=\dfrac{-3m^2}{10(c^2-d^2-1)} \\ a_1\ \text{是任意实数} \\ a_0=\dfrac{m^2}{6(c^2-d^2-1)} \\ D=0 \end{cases} \tag{2.1.35}$$

在条件(2.1.35)下，令 $w=\left(\frac{2}{3}a_2\right)^{\frac{1}{3}}V$，则方程(2.1.33)写成积分形式

$$\pm\left(\frac{2}{3}a_2\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0)=\int\frac{dw}{\sqrt{w\left[w^2+a_1\left(\frac{2}{3}a_2\right)^{-\frac{2}{3}}w+2a_0\left(\frac{2}{3}a_2\right)^{-\frac{1}{3}}\right]}} \tag{2.1.36}$$

欲求解方程(2.1.30)只需求解满足条件(2.1.35)下的积分(2.1.36). 利用二阶多项式完全判别系统法容易写出式(2.1.36)的所有解，于是容易得到2+1维 Sine-Gordon 方程的精确解，这里略.

1.5　Cadrey-Dldd-Gibbon-Kaeada 方程的精确解

考虑 Cadrey-Dldd-Gibbon-Kaeada 方程[106]

$$u_t+(u_{xxxx}+30uu_{xx}+60u^3)_x=0 \tag{2.1.37}$$

作行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=x+ct$，并将方程(2.3.37)积分一次得

$$cu+u^{(4)}+30uu''+60u^3=c_0 \tag{2.1.38}$$

其中,c_0 是任意常数.

按照秩齐次方程的多项式试探方程法,取试探方程

$$u'' = a_2u^2 + a_1u + a_0 \tag{2.1.39}$$

再将式(2.1.39)积分一次得

$$(u')^2 = \frac{2}{3}a_2u^3 + a_1u^2 + 2a_0u + d \tag{2.1.40}$$

由式(2.1.39)和式(2.1.40)可得

$$u^{(4)} = \frac{10}{3}a_2{}^2u^3 + 5a_1a_2u^2 + (6a_2a_0 + a_1{}^2)u + 2a_2d + a_1a_0 \tag{2.1.41}$$

将式(2.1.39),(2.1.41)代入式(2.1.38),有

$$r_3u^3 + r_2u^2 + r_1u + r_0 = 0 \tag{2.1.42}$$

其中,$r_3 = a_2{}^2 + 9a_2 + 18$, $r_2 = a_1a_2 + 6a_1$, $r_1 = a_1{}^2 + 6a_2a_0 + 30a_0 + c$, $r_0 = 2a_2d + a_1a_0 - c_0$.

为确定 a_2, a_1, a_0, d 的值,令 $r_i = 0$, $i = 0, \cdots, 3$, 得到一个代数方程组. 解之有

$$\begin{cases} a_2 = -6 \\ a_1 \text{ 是任意实数} \\ a_0 = \dfrac{a_1^2 + c}{6} \\ d = \dfrac{a_1^3 + a_1c - 6c_0}{72} \\ c_0 \text{ 是任意实数} \end{cases} \tag{2.1.43}$$

以及

$$\begin{cases} a_2 = -3 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = -\dfrac{c}{12} \\ d = -\dfrac{c_0}{6} \\ c_0 \text{ 是任意实数} \end{cases} \tag{2.1.44}$$

在条件(2.1.43)或(2.1.44)下,根据三阶多项式完全判别系统法,容易写出方程(2.1.40)的解,进而能够得到 Cadrey – Dldd – Gibbon – Kaeada 方程的精确行波解,这里略.

1.6 Sawada – Kotera 方程的精确解

考虑 Sawada – Kotera 方程[80]

$$u_t + u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_xu_{xx} + 5u^2u_x = 0 \tag{2.1.45}$$

作行波变换,$u(x,t) = u(\xi)$,$\xi = kx + \omega t$, 将方程(2.1.45)约化为

$$\omega u' + k^5u^{(5)} + 5k^3uu''' + 5k^3u'u'' + 5ku^2u' = 0 \tag{2.1.46}$$

再将式(2.1.46)积分一次有

$$c_1 + \omega u + k^5u^{(4)} + 5k^3uu'' + \frac{5}{3}ku^3 = 0 \tag{2.1.47}$$

其中，c_1 是积分常数. 按照秩齐次方程的多项式试探方程法，取试探方程

$$u'' = a_2u^2 + a_1u + a_0 \tag{2.1.48}$$

再将式(2.1.48)积分一次得

$$(u')^2 = \frac{2}{3}a_2u^3 + a_1u^2 + 2a_0u + d \tag{2.1.49}$$

由式(2.1.48)和式(2.1.49)可知

$$u^{(4)} = \frac{10}{3}a_2^2u^3 + 5a_1a_2u^2 + (6a_2a_0 + a_1^2)u + 2a_2d + a_1a_0 \tag{2.1.50}$$

将式(2.1.48)，(2.1.50)代入式(2.1.47)，可得方程如下

$$r_3u^3 + r_2u^2 + r_1u + r_0 = 0 \tag{2.1.51}$$

其中，$r_3 = \frac{10}{3}k^5a_2^2 + \frac{5}{3}k + 5k^3a_2$，$r_2 = 5k^5a_1a_2 + 5k^3a_1$，$r_1 = \omega + k^5(6a_2a_0 + a_1^2) + 5k^3a_0$，$r_0 = 2a_2k^5d + k^5a_1a_0 + c_1$.

为确定 a_2, a_1, a_0, d，令 $r_i = 0$，$i = 0, \cdots, 3$，得到一个代数方程组，解之得

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{1}{k^2} \\ a_1 \text{ 是任意实数} \\ a_0 = \dfrac{\omega + k^5a_1^2}{k^3} \\ d = \dfrac{k^2\omega a_1 + k^7a_1^3 + c_1}{2k^3} \end{cases} \tag{2.1.52}$$

或者

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{2}{k^2} \\ a_1 = 0 \\ a_0 = \dfrac{\omega}{7k^3} \\ d = \dfrac{c_1}{4k^3} \end{cases} \tag{2.1.53}$$

在参数 a_2, a_1, a_0, d 满足(2.1.52)或(2.1.53)的条件下，根据三阶多项式完全判别系统法，容易写出方程(2.1.49)的所有解的分类，从而得到 Sawada – Kotera 方程的精确行波解，这里略.

1.7 Jaulent – Miodek 方程的精确解

考虑 Jaulent – Miodek[81-86,62]

$$u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2}vv_{xxx} + \frac{9}{2}v_xv_{xx} - 6uu_x - 6uvv_x - \frac{3}{2}u_xv^2 = 0 \tag{2.1.54}$$

$$v_t + v_{xxx} - 6u_xv - 6uv_x - \frac{15}{2}v_xv^2 = 0 \tag{2.1.55}$$

作行波变换，$u = U(\xi)$，$v = V(\xi)$，$\xi = x + dt$，将方程(2.1.54)，(2.1.55)约化成如下方程组

$$dU' + U''' + \frac{3}{2}VV''' + \frac{9}{2}V'V'' - 6UU' - 6UVV' - \frac{3}{2}U'V^2 = 0 \tag{2.1.56}$$

$$dV' + V''' - 6U'V - 6UV' - \frac{15}{2}V'V^2 = 0 \tag{2.1.57}$$

将方程(2.1.57)积分一次得

$$dV + V'' - 6UV - \frac{5}{2}V^3 = c_0 \tag{2.1.58}$$

其中,c_0 为任意常数. 将式(2.1.58)化为

$$U = \frac{c_0 + \frac{5}{2}V^3 - dV - V''}{-6V} \tag{2.1.59}$$

由秩齐次方程的多项式试探方程法,取如下试探方程

$$V'' = a_n V^n + a_{n-1}V^{n-1} + \cdots + a_1 V \tag{2.1.60}$$

将方程(2.1.60)积分一次得

$$(V')^2 = \frac{2a_n}{n+1}V^{n+1} + \frac{2a_{n-1}}{n}V^n + \cdots + a_1 V^2 + a_0 \tag{2.1.61}$$

其中,a_0 是积分常数.

为了确定 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1$ 和 n 的值, 令 $c_0 = 0$,并将式(2.1.59), (2.1.60)和(2.1.61)代入方程(2.1.56)得 $n=3$,以及如下四种解

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4}d + \frac{1}{2} \\ a_2 = -2 \\ a_3 = -2 \end{cases} \tag{2.1.62}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{2}{5}d + \frac{4}{5} \\ a_2 = -2 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.1.63}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4}d \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -2 \end{cases} \tag{2.1.64}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{2}{5}d \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.1.65}$$

其中,d 是任意常数. 因此方程(2.1.61)变成

$$(V')^2 = \frac{a_3}{2}V^4 + \frac{2a_2}{3}V^3 + a_1 V^2 + a_0 \tag{2.1.66}$$

其中,a_0 是积分常数,且方程(2.1.59)变成

$$U=\left(-\frac{5}{6}+\frac{a_3}{6}\right)V^2+\frac{a_2}{6}V+\frac{1}{6}(a_1+d) \tag{2.1.67}$$

于是，剩下的任务就是分别在式(2.1.62)～式(2.1.65)的条件下，求方程(2.1.66)和方程(2.1.67)的解.

下面在条件(2.1.62)下求解方程(2.1.66)和方程(2.1.67). 将式(2.1.62)代入方程(2.1.66)和方程(2.1.67)，得

$$(V')^2=-V^4-\frac{4}{3}V^3-\left(\frac{1}{4}d+\frac{1}{2}\right)V^2+a_0 \tag{2.1.68}$$

和

$$U=-\frac{7}{6}V^2-\frac{1}{3}V+\frac{1}{8}d+\frac{1}{12} \tag{2.1.69}$$

其中，d 和 a_0 都是积分常数. 作如下变换

$$\begin{cases} w=V+\frac{1}{3}, \\ \xi_1=\xi \end{cases} \tag{2.1.70}$$

将式(2.1.70)代入式(2.1.68)，得

$$w_{\xi_1}{}^2=-F(w)=-(w^4+pw^2+qw+r) \tag{2.1.71}$$

其中

$$\begin{cases} p=\frac{1}{4}d-\frac{1}{2} \\ q=\frac{17}{27}-\frac{1}{6}d \\ r=-\frac{5}{54}+\frac{1}{36}d-a_0 \end{cases} \tag{2.1.72}$$

根据四阶多项式完全判别系统法，容易求出方程(2.1.71)的所有解的分类

$$w=\frac{4(\alpha-\beta)}{-(\beta-\alpha)^2(\xi_1-\xi_0)^2-4}+\alpha \quad (w>\alpha,w<\beta\text{ 或 }w<\alpha,w>\beta) \tag{2.1.73}$$

$$w=\frac{\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\varphi-\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2\varphi-(\alpha_1-\alpha_3)} \quad (\alpha_1>w>\alpha_2) \tag{2.1.74}$$

$$w_3=\frac{\alpha_1(\alpha_3-\alpha_4)\sin^2\varphi-\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_4)\sin^2\varphi-(\alpha_3-\alpha_1)} \quad (\alpha_4<w<\alpha_3) \tag{2.1.75}$$

$$w=\frac{\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi_1-\xi_0),m\right)-\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi_1-\xi_0),m\right)-(\alpha_1-\alpha_3)} \tag{2.1.76}$$

$$w=\frac{\alpha_1(\alpha_3-\alpha_4)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi_1-\xi_0),m\right)-\alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)}{(\alpha_3-\alpha_4)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\xi_1-\xi_0),m\right)-(\alpha_3-\alpha_1)} \tag{2.1.77}$$

其中，$m^2=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$.

$$w=\frac{a\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{2sm_1(\alpha-\beta)}}{2mm_1}(\xi_1-\xi_0),m\right)+b}{c\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{2sm_1(\alpha-\beta)}}{2mm_1}(\xi_1-\xi_0),m\right)+d_1}\quad(\alpha>\beta,s>0)\tag{2.1.78}$$

其中，$a=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)c-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)d_1$，$b=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)d_1-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)c$，$c=\alpha-l-\frac{s}{m_1}$，

$d_1=\alpha-l-sm_1$，$E=\frac{s^2+(\alpha-l)(\beta-l)}{s(\alpha-\beta)}$，$m_1=E\pm\sqrt{E^2+1}$，$m^2=\frac{1}{1+m_1{}^2}$.

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)}}\ln\frac{\left[\sqrt{(\alpha-\gamma)(-w+\beta)}-\sqrt{(\beta-\alpha)(w-\gamma)}\right]^2}{|w-\alpha|}\tag{2.1.79}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)}}\ln\frac{\left[\sqrt{(\gamma-\alpha)(-w+\beta)}-\sqrt{(\alpha-\beta)(w-\gamma)}\right]^2}{|w-\alpha|}\tag{2.1.80}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}\arcsin\frac{(\alpha-\gamma)(-w+\beta)+(\beta-\alpha)(w-\gamma)}{|w-\alpha||\beta-\gamma|}\tag{2.1.81}$$

满足方程(2.1.79)～方程(2.1.81)的条件是每个根号下的每一项都大于零.

至此，方程(2.1.71)的所有精确解都得到了，其解为式(2.1.73)～式(2.1.81). 再由式(2.1.70)，可以写出方程(2.1.68)和方程(2.1.69)在相应参数条件下的所有解，这样就能写出方程(2.1.66)和方程(2.1.67)的所有解，从而能写出方程(2.1.54)和方程(2.1.55)的精确行波解. 这些解包括椭圆函数双周期解和有理函数解，如式(2.1.73)，式(2.1.76)，式(2.1.77)，式(2.1.78)等，这是其他方法还没有得到过的.

1.8 Dodd－Bullough－Mikhailov 方程的精确解

考虑 Dodd－Bullough－Mikhailov 方程[79]

$$v_{xt}+e^v+e^{-2v}=0\tag{2.1.82}$$

作变换，$u=e^v$，则方程(2.1.82)变成

$$uu_{tx}-u_xu_t+u^3+1=0\tag{2.1.83}$$

再作行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=x-ct$，则方程(2.1.83)约化成

$$u^3-cuu''+c(u')^2+1=0\tag{2.1.84}$$

按照秩齐次方程的多项式试探方程法，取试探方程

$$u''=a_0+a_1u+a_2u^2\tag{2.1.85}$$

将式(2.1.85)积分一次得

$$(u')^2=2a_0u+a_1u^2+\frac{2}{3}a_2u^3+d\tag{2.1.86}$$

并且得到一个多项式方程

$$u^3-cu(a_0+a_1u+a_2u^2)+c\left(\frac{2}{3}a_2u^3+a_1u^2+2a_0u+d\right)+1=0\tag{2.1.87}$$

为确定参数 a_0,a_1,a_2 和 d，令式(2.1.87)中的系数都为零，得非线性代数方程组，即

$$\begin{cases} 1+\frac{2}{3}ca_2-ca_2=0 \\ -ca_1+ca_1=0 \\ ca_0+2ca_0=0 \\ cd+1=0 \end{cases} \tag{2.1.88}$$

解方程组(2.1.88)得

$$\begin{cases} a_2=\frac{3}{c} \\ a_0=0 \\ d=-\frac{1}{c} \\ a_1 \text{ 为任意实数} \end{cases} \tag{2.1.89}$$

则方程(2.1.86)变为

$$(u')^2=\frac{2}{c}u^3+a_1u^2-\frac{1}{c} \tag{2.1.90}$$

根据三阶多项式完全判别系统法可知方程(2.1.90)的所有解的分类，从而得出 Dodd - Bullough - Mikhailov 方程精确行波解，这里略.

1.9 修正的 Kawahara 方程的精确解

考虑修正的 Kawahara 方程[67]

$$u_t+6u^2u_x+u_{xxx}-u_{xxxxx}=0 \tag{2.1.91}$$

作行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=x-ct$，则方程(2.1.91)约化为

$$-cu'+6u^2u'+u'''-u^{(5)}=0 \tag{2.1.92}$$

再将式(2.1.92)积分一次得

$$-cu+2u^3+u''-u^{(4)}+c_0=0 \tag{2.1.93}$$

其中，c_0 是任意常数. 按秩齐次方程的多项式试探方程法，取试探方程

$$u''=a_2u^2+a_1u+a_0 \tag{2.1.94}$$

再将式(2.1.94)积分一次得

$$(u')^2=\frac{2}{3}a_2u^3+a_1u^2+2a_0u+d \tag{2.1.95}$$

并且可求出

$$u^{(4)}=\frac{10}{3}a_2{}^2u^3+5a_1a_2u^2+(6a_2a_0+a_1{}^2)u+2a_2d+a_1a_0 \tag{2.1.96}$$

将式(2.1.94)，式 (2.1.96)代入式(2.1.93)，有

$$r_3u^3+r_2u^2+r_1u+r_0=0 \tag{2.1.97}$$

其中，$r_3=2-\frac{10}{3}a_2{}^2$，$r_2=a_2-5a_1a_2$，$r_1=-c+a_1-6a_2a_0-a_1^2$，$r_0=a_0-2a_2d-a_1a_0+c_0$.

为确定 a_2,a_1,a_0,d 的值，令 $r_i=0$，$i=0,\cdots,3$，得到一个代数方程组. 解之有

$$\begin{cases} a_2 = \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ a_1 = \dfrac{1}{5} \\ a_0 = \dfrac{1}{6a_2}\left(\dfrac{4}{25} - c\right) \\ d = \dfrac{a_0 - a_1 a_0 + c_0}{2a_2} \end{cases} \tag{2.1.98}$$

为求解方程(2.1.93),只需在条件(2.1.98)下求解方程(2.1.95)，根据三阶多项式完全判别系统法,容易写出方程(2.1.95)的所有解的分类，从而得到修正的 Kawahara 方程(2.1.91)的精确行波解，这里略.

1.10 双 Sine – Gordon 方程的精确解

考虑双 Sine – Gordon 方程[88]

$$u_{xt} = \sin u + \sin(2u) \tag{2.1.99}$$

先令 $v = e^{iu}$,则有

$$\begin{cases} \sin u = \dfrac{v - v^{-1}}{2i} \\ \sin 2u = \dfrac{v^2 - v^{-2}}{2i} \end{cases} \tag{2.1.100}$$

把式(2.1.100)代入方程(2.1.99),则方程(2.1.99)转化为

$$2vv_{xt} - 2v_x v_t = v^4 + v^3 - v - 1 \tag{2.1.101}$$

再作行波变换,$v(x,t) = v(\xi)$, $\xi = kx + \omega t$,则方程(2.1.101)约化为

$$2k\omega vv'' - 2k\omega(v')^2 - v^4 - v^3 + v + 1 = 0 \tag{2.1.102}$$

按照秩齐次多项式试探方程法,取试探方程

$$v'' = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 \tag{2.1.103}$$

积分式(2.1.103)一次得

$$(v')^2 = \frac{1}{2}a_3 v^4 + \frac{2}{3}a_2 v^3 + a_1 v^2 + 2a_0 v + d \tag{2.1.104}$$

并且得到一个多项式方程

$$r_4 v^4 + r_3 v^3 + r_2 v^2 + r_1 v + r_0 = 0 \tag{2.1.105}$$

其中

$$\begin{cases} r_4 = 2k\omega a_3 - k\omega a_3 - 1 \\ r_3 = 2k\omega a_2 - \dfrac{4}{3}k\omega a_2 - 1 \\ r_2 = 2k\omega a_1 - 2k\omega a_1 \\ r_1 = 2k\omega a_0 - 4k\omega a_0 + 1 \\ r_0 = 2k\omega d - 1 \end{cases} \tag{2.1.106}$$

为确定 a_3, a_2, a_1, a_0, d,令 $r_i = 0$, $i = 0, \cdots, 4$,并解之得

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{1}{k\omega} \\ a_2 = \dfrac{3}{2k\omega} \\ a_0 = \dfrac{1}{2k\omega} \\ d = \dfrac{1}{2k\omega} \\ a_1 \text{ 为任意实数} \end{cases} \tag{2.1.107}$$

为求解方程(2.1.99),要先求解方程(2.1.102),则只需在条件(2.1.106)下求解方程(2.1.104). 当 $a_3>0$ 时作如下变换

$$\begin{cases} w = \left(\dfrac{1}{2}a_3\right)^{\frac{1}{4}}\left(v + \dfrac{a_2}{3a_3}\right) \\ \xi_1 = \left(\dfrac{1}{2}a_3\right)^{\frac{1}{4}}\xi \end{cases} \tag{2.1.108}$$

将式(2.1.109)代入式(2.1.107)得

$$w_{\xi_1}^{\ 2} = F(w) = w^4 + pw^2 + qw + r \tag{2.1.109}$$

其中

$$\begin{cases} p = \dfrac{a_1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}a_3}} \\ q = \left(\dfrac{4a_2^{\ 3}}{27a_3^{\ 2}} - \dfrac{2a_1a_2}{3a_3} + 2a_0\right)\left(\dfrac{1}{2}a_3\right)^{-\frac{1}{4}} \\ r = \dfrac{-a_2^{\ 4}}{54a_3^{\ 3}} + \dfrac{a_1a_2^{\ 2}}{9a_3^{\ 2}} - \dfrac{2a_0a_2}{3a_3} + d \end{cases} \tag{2.1.110}$$

当 $a_3<0$ 时,则作如下变换

$$\begin{cases} w = \left(-\dfrac{1}{2}a_3\right)^{\frac{1}{4}}\left(v + \dfrac{a_2}{3a_3}\right) \\ \xi_1 = \left(-\dfrac{1}{2}a_3\right)^{\frac{1}{4}}\xi \end{cases} \tag{2.1.111}$$

将式 (2.1.111) 代入式(2.1.107) 得

$$w_{\xi_1}^{\ 2} = -F(w) = -(w^4 + pw^2 + qw + r) \tag{2.1.112}$$

其中

$$\begin{cases} p = \dfrac{-a_1}{\sqrt{-\dfrac{1}{2}a_3}} \\ q = \left(-\dfrac{4a_2^{\ 3}}{27a_3^{\ 2}} + \dfrac{2a_1a_2}{3a_3} - 2a_0\right)\left(-\dfrac{1}{2}a_3\right)^{-\frac{1}{4}} \\ r = \dfrac{a_2^{\ 4}}{54a_3^{\ 3}} - \dfrac{a_1a_2^{\ 2}}{9a_3^{\ 2}} - \dfrac{2a_0a_2}{3a_3} - d \end{cases} \tag{2.1.113}$$

根据四阶多项式完全判别系统法,容易求得方程(2.1.109)和方程(2.1.112)的所有解的分类,从而写出双 Sine - Gordon 方程的精确行波解,这里略.

1.11 Ito 型五阶 MKdV 方程的精确解

考虑 Ito 型五阶 MKdV 方程[89]

$$u_t + (6u^5 - 10u^2 u_{xx} - 10uu_x^2 + u_{xxxx})_x = 0 \tag{2.1.114}$$

作行波变换,$u(x,t) = u(\xi)$,$\xi = x + ct$,并将方程(2.1.114)积分一次得

$$cu + 6u^5 - 10u^2 u'' - 10u(u')^2 + u^{(4)} + c_0 = 0 \tag{2.1.115}$$

其中,c_0 为积分常数. 按照秩齐次方程的多项式试探方程法,取试探方程

$$u'' = F(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 \tag{2.1.116}$$

积分式(2.1.116)一次得

$$(u')^2 = \frac{1}{2}a_3 u^4 + \frac{2}{3}a_2 u^3 + a_1 u^2 + 2a_0 u + d \tag{2.1.117}$$

其中,d 为积分常数. 将方程(2.1.116),方程(2.1.117)以及由它们导出的 $u^{(4)}$ 代入方程(2.1.115),得到一个关于 u 的方程

$$r_5 u^5 + r_4 u^4 + r_3 u^3 + r_2 u^2 + r_1 u + r_0 = 0 \tag{2.1.118}$$

其中,$r_5 = 6a_3^2 - 15a_3 + 6$, $r_4 = a_2 a_3 - \frac{5}{3}a_2$, $r_3 = \frac{10}{3}a_2^2 + 10a_3 a_1 - 20a_1$,$r_2 = 5a_2 a_1 + 15a_3 a_0 - 30a_0$,$r_1 = 6a_2 a_0 + 6a_3 d + a_1^2 + c - 10d$,$r_0 = 2a_2 d + a_1 a_0 + c_0$.

为确定 a_3, a_2, a_1, a_0, d 的值,令 $r_i = 0$, $i = 0, \cdots, 5$;得到一个非线性代数方程组,解之得

$$\begin{cases} a_3 = 2 \\ a_2 = 0 \\ d = \dfrac{-c - a_1^2}{2} \\ a_0 \text{ 和 } a_1 \text{ 为任意实数} \\ c_0 = 2c + 2a_1^2 - a_1 a_0 \end{cases} \tag{2.1.119}$$

或者

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 = a_1 = a_0 = 0 \\ d = \dfrac{c}{7} \\ c_0 = 0 \end{cases} \tag{2.1.120}$$

为求方程(2.1.115)的解,只需求在条件(2.1.119)或(2.1.120)下方程(2.1.117)的解. 例如,在条件(2.1.119)下方程(2.1.117)变为

$$(u')^2 = \frac{1}{2}u^4 + a_1 u^2 + 2a_0 u - \frac{c + a_1^2}{2} \tag{2.1.121}$$

其中,a_0 和 a_1 为任意实数. 将式(2.1.121)写成积分形式

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\xi-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4+2a_1u^2+4a_0u-c-a_1^2}} \tag{2.1.122}$$

根据四阶多项式的完全判别系统法易写出方程(2.1.122)的所有解的分类，从而得到 Ito 型五阶 MKdV 方程(2.1.114)的精确行波解，这里略.

1.12　幂律非线性 Schrodinger 方程的精确解

考虑幂律非线性 Schrodinger 方程[90,109]

$$iw_t+aw_{xx}-bw_{xxxx}+c|w|^{2n}w=0 \tag{2.1.123}$$

首先我们作变换，$w(x,t)=u(\xi)\exp[i(kx-\omega t)]$，$\xi=k_1x-\omega_1t$，将方程(2.1.123)变为

$$(-\omega_1+2ak_1k+4bk_1k^3)u'-4bk_1^3ku'''=0 \tag{2.1.124}$$

和

$$bk_1^4u^{(4)}-(ak_1^2+6bk_1^2k^2)u''-(\omega-ak^2-bk^4)u-cu^{2n+1}=0 \tag{2.1.125}$$

为使方程(2.1.124)和方程(2.1.125)一致，令方程(2.1.124)的系数全为零，有

$$\begin{cases}k=0\\ \omega_1=0\end{cases} \tag{2.1.126}$$

为求方程(2.1.123)的精确行波解，下面只需在条件(2.1.126)下求解方程(2.1.125)，按照秩齐次方程的多项式试探方程法，取试探方程

$$u''=F(u)=a_0+a_1u+\cdots+a_mu^m \tag{2.1.127}$$

将方程(2.1.127)积分一次可得到

$$(u')^2=\frac{2}{m+1}a_mu^{m+1}+\cdots+a_1u^2+2a_0u+d \tag{2.1.128}$$

并且由式(2.1.127)，式(2.1.128)求得

$$u^{(4)}=F''(u)(u')^2+F'(u)u'' \tag{2.1.129}$$

将式(2.1.127)，式(2.1.129)代入(2.1.125)，并利用平衡原则可知 $m=n+1$. 此时方程(2.1.128)即为

$$(u')^2=\frac{2}{n+2}a_{n+1}u^{n+2}+\cdots+a_1u^2+2a_0u+d \tag{2.1.130}$$

并且可得到一个关于 u 的多项式 $G(u)$. 令 $G(u)$ 的所有系数为零，可得一个 u 的非线性代数方程组. 求解这个方程组，则可确定 $a_0,a_1,\cdots,a_{n+1},d$ 的值，下面就求这些值.

当 $n=1$ 时，将式(2.1.127)，式(2.1.129)代入式(2.1.125)得

$$G(u)=r_3u^3+r_2u^2+r_1u+r_0=0 \tag{2.1.131}$$

其中，$r_3=\frac{10}{3}bk_1^4a_2^2-c$，$r_2=5bk_1^4a_1a_2-ak_1^2a_2$，$r_1=6bk_1^4a_2a_0+bk_1^4a_1^2-ak_1^2a_1-\omega$，$r_0=2a_2bk_1^4d+bk_1^4a_1a_0-ak_1^2a_0$.

为确定 $a_0,a_1,\cdots,a_{n+1},d$ 的值，令 $r_i=0,i=0,\cdots,3$，得到一个代数方程组，解之得

$$\begin{cases} a_2 = \pm\sqrt{\dfrac{3c}{10k_1^4 b}} \\ a_1 = \dfrac{a}{5bk_1^2} \\ a_0 = \dfrac{\omega + ak_1^2 a_1 - bk_1^4 a_1^2}{6bk_1^4 a_2} \\ d = \dfrac{aa_0 - bk_1^2 a_1 a_0}{2bk_1^4 a_2} \end{cases} \tag{2.1.132}$$

当 $n=2$ 时，用同样的方法可以求得

$$\begin{cases} a_3 = \pm\sqrt{\dfrac{c}{6bk_1^4}} \\ a_2 = 0 \\ a_1 = \dfrac{a}{10bk_1^2} \\ a_0 = 0 \\ d = \dfrac{\omega + aa_1 k_1^2 - bk_1^4 a_1^2}{6bk_1^4 a_3} \end{cases} \tag{2.1.133}$$

当 $n\geqslant 3$ 时，用同样的方法可以求得

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_0 = d = 0 \\ a_{n+1} = \pm\sqrt{\dfrac{(n+2)c}{(n+1)(3n+2)bk_1^4}} \\ a_1 = \dfrac{a}{bk_1^2(n^2+2n+2)} \\ a^2(n^2+2n+1) + \omega b(n^2+2n+2)^2 = 0 \end{cases} \tag{2.1.134}$$

为求方程(2.1.125)，下面分别在条件(2.1.132)，(2.1.133)，(2.1.134)下，求解方程(2.1.130)。

当 $n=1$ 时，方程(2.1.130)变成

$$(u')^2 = \frac{2}{3}a_2 u^3 + a_1 u^2 + 2a_0 u + d \tag{2.1.135}$$

这里，a_2, a_1, a_0, d 满足条件(2.1.132)。根据三阶多项式完全判别系统法容易求得方程(2.1.135)的所有解的分类，从而求得方程(2.1.123)相应参数条件下的精确行波解为

$$w_1(z,t) = \pm\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{(\alpha-\beta)\tanh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\alpha-\beta}\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_1 x-\xi_0)\right]+\beta\right\}\times$$
$$\exp(-i\omega t) \quad (\alpha>\beta)$$

$$w_2(z,t) = \pm\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{(\alpha-\beta)\coth^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\alpha-\beta}\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_1 x-\xi_0)\right]+\beta\right\}\times$$
$$\exp(-i\omega t) \quad (\alpha>\beta)$$

$$w_3(z,t) = \pm\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{(\beta-\alpha)\tan^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\beta-\alpha}\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_1 x-\xi_0)\right]+\alpha\right\}\times$$

$$\exp(-i\omega t) \quad (\alpha < \beta)$$

$$w_4(z,t) = \left[4\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{-\frac{2}{3}}(k_1x-\xi_0)^{-2}+\alpha\right]\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_5(z,t) = \pm\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_1x-\xi_0),m\right)\right]\exp(-i\omega t)$$

$$w_6(z,t) = \pm\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c'}{5b}}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{\gamma-\beta\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_1x-\xi_0),m\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_1x-\xi_0),m\right)}\times\exp(-i\omega t)$$

其中，$m^2=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

$$w_7(z,t) = \pm\left(\frac{2}{3k_1^2}\sqrt{\frac{c}{5b}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha+\frac{2\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}{1+\mathrm{cn}\left((\alpha^2+p\alpha+q)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2a_2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(\xi-\xi_0),m\right)}-\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}\right]$$

$$\times\exp(-i\omega t)$$

其中，$m^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha+\frac{p}{2}}{\sqrt{\alpha^2+p\alpha+q}}\right)$.

当 $n=2$ 时，方程(2.1.130)变成

$$(u')^2=\frac{1}{2}a_3u^4+a_1u^2+d \tag{2.1.136}$$

其中，a_3,a_1,d 满足条件(2.1.133). 为求解方程(2.1.136)，令

$$\begin{cases} u=\pm\sqrt{(2a_3)^{-\frac{1}{3}}\varphi} \\ b_1=4a_1(2a_3)^{-\frac{2}{3}} \\ b_0=4d(2a_3)^{-\frac{1}{3}} \\ \xi_1=(2a_3)^{\frac{1}{3}}\xi \end{cases} \tag{2.1.137}$$

则方程 (2.1.136) 变成

$$(\varphi_{\xi_1})^2=\varphi(\varphi^2+b_1\varphi+b_0) \tag{2.1.138}$$

将式(2.1.138)相应地写成如下积分形式

$$\pm(\xi_1-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\varphi(\varphi^2+b_1\varphi+b_0)}} \tag{2.1.139}$$

令 $\Delta=b_1{}^2-4b_0$ 为式(2.1.139)右边的二阶多项式 $F(\varphi)=\varphi^2+b_1\varphi+b_0$ 的完全判别系统，根据二阶多项式完全判别系统法，方程(2.1.139)的所有解的分类容易求得，从而求得 $n=2$ 时带有幂律非线性项的 Schrodinger 方程的精确行波解

$$w_1(z,t)=\pm\left(-\frac{a}{10b}\sqrt{\frac{6b}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}\tanh\left[\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{a}{5b}}(k_1x-\xi_0)\right]\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_2(z,t)=\pm\left(-\frac{a}{10b}\sqrt{\frac{6b}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}\coth\left[\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{a}{5b}}(k_1x-\xi_0)\right]\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_3(z,t)=\pm\left(-\frac{a}{10b}\sqrt{\frac{6b}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\left[\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{a}{5b}}(k_1x-\xi_0)\right]\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_4(z,t)=\pm\frac{\sqrt{2}k_1}{\left(\frac{c}{6b}\right)^{\frac{1}{4}}(k_1x-\xi_0)}\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_5(z,t)=\pm\left(-\frac{a}{10b}\sqrt{\frac{6b}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\tanh^2\left(\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{a}{5b}}(k_1x-\xi_0)\right]-2\right\}^{\frac{1}{2}}\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_6(z,t)=\pm\left(-\frac{a}{10b}\sqrt{\frac{6b}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\coth^2\left[\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{a}{5b}}(k_1x-\xi_0)\right]-2\right\}^{\frac{1}{2}}\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_7(z,t)=\pm\left(-\frac{a}{10b}\sqrt{\frac{6b}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\tan^2\left[\frac{1}{2k_1}\sqrt{-\frac{a}{5b}}(k_1x-\xi_0)\right]+2\right\}^{\frac{1}{2}}\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_8(z,t)=\pm\left(2\sqrt{\frac{c}{6bk_1^4}}\right)^{-\frac{1}{6}}\left[\alpha+(\beta-\alpha)\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(2\sqrt{\frac{c}{6bk_1^4}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_1x-\xi_0),m\right)\right]\times\exp(-i\omega t)$$

$$w_9(z,t)=\pm\left(2\sqrt{\frac{c}{6bk_1^4}}\right)^{-\frac{1}{6}}\left[\frac{\gamma-\beta\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(2\sqrt{\frac{c}{6bk_1^4}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_1x-\xi_0),m\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\left(2\sqrt{\frac{c}{6bk_1^4}}\right)^{\frac{1}{3}}(k_x-\xi_0),m\right)}\right]\times\exp(-i\omega t)$$

其中，$m^2=\dfrac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$.

$$w_{10}(z,t)=\pm\left(2\sqrt{\frac{c}{6bk_1^4}}\right)^{-\frac{1}{6}}\left[\frac{2^{\frac{11}{6}}\sqrt{d}\left(\frac{c}{6bk_1^4}\right)^{-\frac{1}{12}}}{1+\mathrm{cn}\left(\left(8d\sqrt{\frac{c}{6bk_1^4}}\right)^{\frac{1}{4}}(k_1x-\xi_0),m\right)}-\frac{2^{\frac{5}{6}}\sqrt{d}}{\left(\frac{c}{6bk_1^4}\right)^{\frac{1}{12}}}\right]\times\exp(-i\omega t)$$

其中，$m^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{ak_1}{2\sqrt{\dfrac{2dc}{6b}}}$.

当 $n\geqslant 3$ 时，方程(2.1.130)变成

$$(u')^2=\frac{2}{n+2}a_{n+1}u^{n+2}+a_1u^2 \tag{2.1.140}$$

其中，a_{n+1}，a_1 满足条件(2.1.134).

为求解方程(2.1.140)，可利用 $n+2$ 阶多项式的完全判别系统，将多项式方程的根进行分类，从而求出方程(2.1.140)的解. 但是，对于高于六阶的多项式，其完全判别系统以及相应的参数条件非常复杂. 为简略起见，这里只取 $n=3$ 及 $n=4$ 作为例子来说明这个求解方法.

例如 $n=3$ 时，方程(2.1.140)变为

$$(u')^2=\frac{2}{5}a_4u^5+a_1u^2 \tag{2.1.141}$$

根据条件(2.1.134)可知

$$\begin{cases} a_4 = \pm\sqrt{\dfrac{5c}{44bk_1^4}} \\ a_1 = \dfrac{a}{17bk_1^2} \\ 16a^2 + 17^2\omega b = 0 \end{cases} \tag{2.1.142}$$

将式(2.1.141)可写成如下形式

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2}{5}a_4u^5 + a_1u^2}} = \pm(\xi - \xi_0) \tag{2.1.143}$$

那么积分式(2.1.143)的所有可能的解如下所示.

若 $a_1=0$ 且 $a_4>0$,则 $u_1=\left[\pm\sqrt{\frac{9}{10}a_4}(\xi-\xi_0)\right]^{-\frac{2}{3}}$;若 $a_1\neq 0$,为求解方程(2.1.143),令

$$\phi = \left(\frac{2}{5}a_4\right)^{\frac{1}{3}}u \tag{2.1.144}$$

则方程(2.1.143)可写成

$$\int \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{\phi^3 + a_1}} = \pm(\xi - \xi_0) \tag{2.1.145}$$

当 $\phi > -a_1^{\frac{1}{3}}$ 时,方程 (2.1.145)的解为

$$\pm(\xi - \xi_0) = -\frac{\tan\theta + \cot\theta}{2(s_1\tan\theta - l_1)\sqrt{\frac{s_1}{\sin^3 2\theta}}}F(\varphi,k) - \frac{s_1\tan\theta + s_1\cot\theta}{s_1\cot\theta + l_1}\times$$

$$\left[\frac{\tan\theta + l_1}{(s_1\cot\theta + l_1)\sin\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + F(\varphi,k) - E(\varphi,k)\right] \tag{2.1.146}$$

其中,$k=\sin\frac{\pi}{12}$, $l_1=\frac{1}{2}a_1^{\frac{1}{3}}$,$s_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1^{\frac{1}{3}}$, $F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$, $E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi$.

再由式(2.1.144),式(2.1.142)等可写出在 $n=3$ 时方程(2.1.123)的精确行波解,这里略.

例如 $n=4$ 时,方程(1.2.130)变为

$$(u')^2 = \frac{1}{3}a_5u^6 + a_1u^2 \tag{2.1.147}$$

根据条件(2.1.134)可知

$$\begin{cases} a_5 = \pm\sqrt{\dfrac{3c}{35bk_1^4}} \\ a_1 = \dfrac{a}{26bk_1^2} \\ 25a^2 + 26^2\omega b = 0 \end{cases} \tag{2.1.148}$$

令

$$u^2 = \varphi \tag{2.1.149}$$

并将方程(2.1.147)写成如下形式

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi\sqrt{\frac{1}{3}a_5\varphi^2 + a_1}} = \pm 2(\xi - \xi_0) \tag{2.1.150}$$

则式(2. 1. 150)的解如下.

若 $a_1=0, a_5>0$,则

$$\varphi=\pm\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}a_5}(\xi-\xi_0)}\tag{2.1.151}$$

若 $a_1>0, a_5>0$,则

$$\pm 2(\xi-\xi_0)=\frac{1}{2\sqrt{a_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1}{3}a_5\varphi^2+a_1}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{\frac{1}{3}a_5\varphi^2+a_1}+\sqrt{a_1}}\right|\tag{2.1.152}$$

若 $a_1>0, a_5<0$,则

$$\pm 2(\xi-\xi_0)=\frac{1}{2\sqrt{a_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{\frac{1}{3}a_5\varphi^2+a_1}}{\sqrt{a_1}+\sqrt{\frac{1}{3}a_5\varphi^2+a_1}}\right|\tag{2.1.153}$$

若 $a_1<0, a_5>0$,则

$$\pm 2(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{-a_1}}\arccos\left(\frac{1}{\varphi}\sqrt{\frac{-3a_1}{a_5}}\right)\tag{2.1.154}$$

由以上可知,式(2. 1. 151) ~ 式(2. 1. 154)为式(2. 1. 147)的所有解的分类. 再根据式(2. 1. 149),式(2. 1. 148)可以写出方程(2. 1. 123)在 $n=4$ 时的精确行波解,这里略.



第2章 秩齐次方程的改进多项式试探方程法及其应用

秩齐次方程的多项式试探方程法可以求出很多秩齐次微分方程的精确解,但对于某些特殊的秩齐次微分方程却不适用,例如标准 Kawahara 方程,所以需要对秩齐次方程的多项式试探方程法作改造,改造后的试探方程法我们称之为秩齐次方程的改进多项式试探方程法,本章给出它的主要步骤及应用.

2.1 秩齐次方程的改进多项式试探方程法的主要步骤

第一步:对于所考虑的非线性方程

$$N(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0 \tag{2.2.1}$$

作行波变换,$u(x,t)=u(\xi)$,$\xi=kx+\omega t$,将方程(2.2.1)约化为

$$M(u,u',u'',\cdots)=0 \tag{2.2.2}$$

第二步:取试探方程

$$u=a_0+a_1w+a_2w^2+\cdots+a_sw^s \tag{2.2.3}$$

及

$$w''=b_0+b_1w+b_2w^2+\cdots+b_mw^m \tag{2.2.4}$$

其中,系数为待定常数.由式(2.2.3),式(2.2.4)可导出 u',u''以及 u''',$u^{(4)}$等其他导数项.将这些项代入式(2.2.2)中,得到一个 w 的多项式,$G(w)=r_kw^k+\cdots+r_1w+r_0$.根据平衡原则能确定 m 及 s 的关系,从而确定他们的具体值.

第三步:令 $G(w)$ 的各项系数都为零,得到一个非线性代数方程组

$$r_i=0\quad(i=0,\cdots,k) \tag{2.2.5}$$

解代数方程组(2.2.5)可确定 $a_0,\cdots,a_s$ 及 $b_0,\cdots,b_m$ 的值.

第四步:将式(2.2.4)化成初等积分形式

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{d+2b_0w+b_1w^2+\cdots+\dfrac{2b_m}{m+1}w^{m+1}}} \tag{2.2.6}$$

利用 $m+1$ 阶多项式的完全判别系统法可以求出方程(2.2.6)的所有解的分类,再由式(2.2.3)可解出方程(2.2.1)的精确行波解.

2.2 标准 Kawahara 方程的精确解

考虑标准 Kawahara 方程[87]

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}-u_{xxxxx}=0 \tag{2.2.7}$$

作行波变换,$u(x,t)=u(\xi)$,$\xi=kx+\omega t$,将方程(2.2.7)约化为

$$\omega u'+6kuu'+k^3u'''-k^5u^{(5)}=0 \tag{2.2.8}$$

再将式(2.2.8)积分一次得

$$\omega u+3ku^2+k^3u''-k^5u^{(4)}+c_0=0 \tag{2.2.9}$$

其中,c_0 是任意常数.

如果还按照秩齐次多项式试探方程法那样,取试探方程

$$u''=F(u)=a_0+a_1u+\cdots+a_mu^m \tag{2.2.10}$$

由式(2.2.10)可导出

$$u^{(4)}=F''(u)(u')^2+F'(u)u'' \tag{2.2.11}$$

将式(2.2.10),式(2.2.11)代入方程(2.2.9),u 的导数项的最高阶数为 $2m-1$,而 u 的多项式的最高阶数为2,故没有正整数 m 使 $2m-1=2$,所以秩齐次方程的多项式试探方程法不再适用了.

按照秩齐次方程的改进多项式试探方程法,取试探方程

$$u=F(w)=a_0+a_1w+a_2w^2+\cdots+a_sw^s \tag{2.2.12}$$

$$w''=b_0+b_1w+b_2w^2+\cdots+b_mw^m \tag{2.2.13}$$

则由式(2.2.12),式(2.2.13)可导出以下各项

$$(w')^2=2b_0w+b_1w^2+\cdots+\frac{2}{m+1}b_mw^{m+1}+d \tag{2.2.14}$$

$$u'=F'(w)w' \tag{2.2.15}$$

$$u''=F''(w)(w')^2+F'(w)w'' \tag{2.2.16}$$

以及 u''',$u^{(4)}$等. 将 u,u^2,u''及 $u^{(4)}$代入式(2.2.9),并根据平衡原则可得 $s=2m-2$. 若取 $m=2$,则 $s=2$;取 $m=3$,则 $s=4$,等等。这里我们取 $m=2$,则 $s=2$. 那么式(2.2.12),式(2.2.13)分别变为

$$u=a_0+a_1w+a_2w^2 \tag{2.2.17}$$

$$(w')^2=G(w)=2b_0w+b_1w^2+\frac{2}{3}b_2w^3+d \tag{2.2.18}$$

且由式(2.2.17),式(2.2.18)可导出 u'',$u^{(4)}$等. 再将 u,u^2,u''及 $u^{(4)}$代入式(2.2.9)可得关于 w 的方程

$$r_4w^4+r_3w^3+r_2w^2+r_1w+r_0=0$$

其中

$$r_4=3ka_2^2-\frac{70}{3}k^5a_2b_2^2$$

$$r_3=6ka_1a_2+\frac{10}{3}k^3a_2b_2-\frac{130}{3}k^5a_2b_1b_2-\frac{10}{3}k^5a_1b_2^2$$

$$r_2=\omega a_2+6ka_0a_2+3ka_1^2+4k^3a_2b_1+k^3a_1b_2-56k^5a_2b_0b_2-16k^5a_2b_1^2-5k^5a_1b_1b_2$$

$$r_1=\omega a_1+6ka_1a_0+6k^3a_2b_0+k^3a_1b_1-30k^5a_2b_0b_1-20k^5a_2b_2d-6k^5a_1b_0b_2-k^5a_1b_1^2$$

$$r_0=\omega a_0+3ka_0^2+2k^3a_2d+k^3a_1b_0-6k^5a_2b_0^2-8k^5a_2b_1d-2k^5b_2a_1d-k^5a_1b_1b_0+c_0$$

解方程组 $r_i=0$, $i=0,\cdots,4$,可得一组解为

$$b_2=\frac{3}{2}, b_1\text{ 为任意实数}, a_2=\frac{70}{9}k^4b_2^2, a_1=\frac{910k^2b_1-70}{117}k^2b_2$$

$$b_0=\frac{-P\pm\sqrt{P^2-1\,532k^9Q}}{966k^9}, C=\frac{6a_2-30k^5a_2b_1-3k^2a_1b_2}{525k^6}$$

$$A=\frac{16k^5a_2b_1^2+5k^5a_1b_1b_2-\omega a_2-3ka_1^2-4k^3a_2b_1-k^3a_1b_2}{6ka_2}$$

$$P=14k^3\omega+\frac{28}{5}k^2a_1+2k^3a_2C+k^3a_1-2k^5\left(\frac{28a_1}{175k^4}+C\right)(4a_2b_1+b_2a_1)-k^5a_1b_1$$

$$Q=\frac{(6a_1kA+\omega a_1+k^3a_1b_1-k^5a_1b_1^2)(2k^3a_2-8k^5a_2b_1-2k^5b_2a_1)}{18\,480k^9}+c_0$$

$$a_0=\frac{56k^5a_2b_0b_2+16k^5a_2b_1^2+5k^5a_1b_1b_2-\omega a_2-3ka_1^2-4k^3a_2b_1-k^3a_1b_2}{6ka_2}$$

$$d=\frac{\omega a_1+6ka_1a_0+6k^3a_2b_0+k^3a_1b_1-30k^5a_2b_0b_1-6k^5a_1b_0b_2-k^5a_1b_1^2}{20k^5a_2b_2}$$

于是,剩下的问题就是首先求解方程(2.2.18). 根据三阶多项式完全判别法，容易求得方程(2.2.18)的所有解的分类，然后利用方程(2.2.17)，可以写出标准 Kawahara 方程的精确行波解了，这里略.

这一节介绍的方法具有普遍性,适用于求解与上面数学物理方程类似的秩齐次非线性数学物理方程.



第 3 章　秩非齐次方程的多项式试探方程法及其应用

利用秩齐次方程的多项式试探方程法及秩齐次方程的改进多项式试探方程法可以求出很多秩齐次微分方程的解,但对于秩非齐次微分方程一般不适用,为寻求更多的非线性数学物理方程的精确解,还需要新的试探方程法. 下面介绍一种适用于秩非齐次方程的求解方法,这里称之为秩非齐次方程的多项式试探方程法. 本章给出它的主要步骤和应用.

3.1　秩非齐次方程的多项式试探方程法的主要步骤

第一步:对于所考虑的非线性方程

$$N(u, u_t, u_x, u_{xx}, \cdots) = 0 \tag{2.3.1}$$

作行波变换,$u(x,t) = u(\xi)$,$\xi = kx + \omega t$, 将方程(2.3.1)约化为

$$M(u, u', u'', \cdots) = 0 \tag{2.3.2}$$

第二步:取试探方程

$$u' = F(u) = \sum_{i=0}^{m} a_i u^i \tag{2.3.3}$$

其中,系数为常数. 由式(2.3.3)可导出

$$u'' = F'(u)F(u) \tag{2.3.4}$$

$$u''' = F''(u)F^2(u) + [F'(u)]^2 F(u) \tag{2.3.5}$$

以及 $u^{(4)}$ 等其他导数项. 将这些项代入式(2.3.2)中,得到一个 u 的多项式 $G(u)$

$$G(u) = r_k u^k + \cdots + r_1 u + r_0 \tag{2.3.6}$$

根据平衡原则能确定 m 的值.

第三步:令 $G(u)$ 的系数都是零,得到一个代数方程组

$$r_i = 0 \quad (i = 0, \cdots, k) \tag{2.3.7}$$

解方程组(2.3.7), 可确定 $a_0, \cdots, a_m$ 的值.

第四步:将式(2.3.3)化成初等积分形式

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{\mathrm{d}u}{F(u)} \tag{2.3.8}$$

容易求出方程(2.3.8)的所有解的分类, 从而写出方程(2.3.1)相应的精确行波解.

注:事实上, 利用秩齐次方程的多项式试探方程法能求解的方程, 也可以用秩非齐次方程的多项式试探方程法求解, 但使用起来不如前者快捷.

3.2　广义 Fisher 方程的精确解

考虑广义 Fisher 方程[92]

$$u_t - u_{xx} = pu(1 - u^r)(q + u^r) \tag{2.3.9}$$

其中,p, q, r 为参数.

作行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=kx+\omega t$，将其代入式(2.3.9)并积分一次得

$$\omega u' - k^2 u'' = pqu + p(1-q)u^{r+1} - pu^{2r+1} \tag{2.3.10}$$

按照秩非齐次方程的多项式试探方程法，取试探方程

$$u' = F(u) = \sum_{i=0}^{m} a_i u^i \tag{2.3.11}$$

则由方程(2.3.11)可导出

$$u'' = F'(u)F(u) \tag{2.3.12}$$

将式(2.3.11)，式(2.3.12)代入式(2.3.10)，并利用平衡原则得 $m=r+1$，再由第三步求得 $a_{r+1}=\pm\sqrt{\dfrac{p}{k^2(r+1)}}$，$a_1=\dfrac{\omega\pm\sqrt{\omega^2-4k^2pq}}{2k^2}$，$a_i=0, i=0,2,\cdots,r$，且

$$\left[(r+2)a_1-\frac{\omega}{k^2}\right]a_{r+1} = -\frac{p(1-q)}{k^2} \tag{2.3.13}$$

在条件(2.3.13)下试探方程(2.3.11)变为

$$u' = u(a_{r+1}u^r + a_1) \tag{2.3.14}$$

将式(2.3.14)写成积分形式

$$\xi-\xi_0 = \int \frac{\mathrm{d}u}{u(a_{r+1}u^r - a_1)} \tag{2.3.15}$$

解方程(2.3.15)得到广义 Fisher 方程的精确行波解

$$u_1 = \left\{-\frac{a_1}{2a_{r+1}}\left[1+\tanh\left(\frac{1}{2}a_1 r(\xi-\xi_0)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{r}} \quad (a_{r+1}>0 \text{ 或 } a_{r+1}(-1)^r>0)$$

$$u_2 = \left\{\frac{a_1}{2a_{r+1}}\left[1+\coth\left(\frac{1}{2}a_1 r(\xi-\xi_0)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{r}} \quad (a_{r+1}<0 \text{ 或 } a_{r+1}(-1)^r<0)$$

第4章 秩非齐次方程的改进多项式试探方程法及其应用

尽管秩非齐次方程的多项式试探方程法可以求得许多秩非齐次方程的解，但对某些秩非齐次方程还不适用，如微分方程是如下形式

$$u'' + \alpha u' = Au^{2n} + Bu + C \tag{2.4.1}$$

按照秩非齐次方程的多项式试探方程法，将试探方程 $u' = F(u) = \sum_{i=0}^{m} a_i u^i$ 和 $u'' = F'(u)F(u)$ 代入式(2.4.1)后得

$$[F'(u) + \alpha]F(u) = Au^{2n} + Bu + C \tag{2.4.2}$$

易知式(2.4.2)左边的阶数为 $2m-1$，而右边的阶数为 $2n$，没有非负整数 m,n 使 $2m-1=2n$，故秩非齐次方程的多项式试探方程法不再适用，必须给出能够求解这类方程的新的试探方程法，我们称之为秩非齐次方程的改进多项式试探方程法. 本章给出它的主要步骤及应用.

4.1 秩非齐次方程的改进多项式试探方程法的主要步骤

第一步：对于所考虑的非线性方程

$$N(u, u_t, u_x, u_{xx}, \cdots) = 0 \tag{2.4.3}$$

作行波变换，$u(x,t) = u(\xi)$，$\xi = kx + \omega t$，将方程(2.4.3)约化为

$$M(u, u', u'', \cdots) = 0 \tag{2.4.4}$$

第二步：取试探方程

$$u = R(\varphi) = \sum_{i=0}^{s} d_i \varphi^i \tag{2.4.5}$$

及

$$\varphi' = F(\varphi) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi^i \tag{2.4.6}$$

其中，系数为常数. 由式(2.4.5)，式(2.4.6)可导出

$$u' = R'(\varphi)F(\varphi) \tag{2.4.7}$$

$$u'' = R''(\varphi)F^2(\varphi) + R'(\varphi)F'(\varphi)F(\varphi) \tag{2.4.8}$$

以及 u'''，$u^{(4)}$ 等其他导数项. 将这些项代入式(2.4.4)中，得到一个 φ 的多项式 $G(\varphi)$

$$G(\varphi) = r_k \varphi^k + \cdots + r_1 \varphi + r_0 \tag{2.4.9}$$

根据平衡原则能确定 m 与 s 的关系，从而确定 m 与 s 的具体值.

第三步：令 $G(\varphi)$ 的系数都是零，得到一个代数方程组

$$r_i = 0 \quad (i = 0, \cdots, k) \tag{2.4.10}$$

解方程组(2.4.10)，可确定 $a_0, \cdots, a_m$ 及 $d_0, \cdots, d_s$ 的值.

第四步：将式(2.4.6)化成初等积分形式

$$\xi - \xi_0 = \int \frac{d\varphi}{F(\varphi)} \tag{2.4.11}$$

根据 m 阶多项式完全判别系统法易求出方程(2.4.11)的所有解的分类,再由式(2.4.5)可写出方程(2.4.3)相应的精确行波解.

4.2 非线性电报方程的精确解

考虑非线性电报方程[107]

$$u_{tt}-u_{xx}+u_t+\alpha u+\beta u^3=0 \tag{2.4.12}$$

作行波变换,$u(x,t)=u(\xi)$,$\xi=kx+\omega t$,将方程(2.4.12)约化成

$$u''+\alpha u'=Au^3+Bu \tag{2.4.13}$$

其中,$\alpha=\frac{\omega}{\omega^2-k^2}$,$A=\frac{\beta}{k^2-\omega^2}$,$B=\frac{\alpha}{k^2-\omega^2}$.

按照秩非齐次方程的改进多项式试探方程法,取试探方程(2.4.5),方程(2.4.6),并将式(2.4.5),式(2.4.7),式(2.4.8)代入方程(2.4.13),根据平衡原则可得 $s=m-1$. 这里我们取 $m=2,s=1$ 作为例子来计算. 此时,不失一般性,可取试探方程为

$$u=d_1\varphi+d_0 \tag{2.4.14}$$

$$\varphi'=a_2\varphi^2+a_0 \tag{2.4.15}$$

由第二步及第三步可得关于 φ 的代数方程组

$$2d_1a_2^2-Ad_1^3=0$$

$$\alpha d_1a_2-3Ad_0d_1^2=0$$

$$2d_1a_2a_0-3Ad_0^2d_1-Bd_1=0$$

$$\alpha d_1a_0-Ad_0^3-Bd_0=0$$

解之得

$$\begin{cases}d_1=\pm\sqrt{\frac{2}{A}}a_2\\ d_0=\pm\frac{\alpha}{3\sqrt{2A}}\\ a_0=\frac{1}{2a_2}\left(\frac{\alpha^2}{6}+B\right)\\ 2\alpha^2+9B=0\end{cases} \tag{2.4.16}$$

其中,a_2 是任意不为零的实数.

在满足(2.4.16)的条件下,求解方程(2.4.15),再将求得的 φ 代入式(2.4.14),即可求得非线性电报方程的精确行波解,有三种情形:

当 $a_0=0$ 时

$$u_1=-\frac{d_1}{a_2(\xi-\xi_0)}+d_0$$

当 $a_2a_0<0$ 时

$$u_2=\frac{d_1a_0}{\sqrt{-a_2a_0}}\tanh\left[\sqrt{-a_2a_0}(\xi-\xi_0)\right]+d_0$$

$$u_3=\frac{d_1a_0}{\sqrt{-a_2a_0}}\coth\left[\sqrt{-a_2a_0}(\xi-\xi_0)\right]+d_0$$

当 $a_2a_0>0$ 时

$$u_4=\frac{d_1a_0}{\sqrt{a_2a_0}}\tan[\sqrt{a_2a_0}(\xi-\xi_0)]+d_0$$



第5章　有理试探方程法及其应用

前面介绍了四种多项式试探方程法，可以求出大量的非线性数学物理方程的精确解，包括许多新解. 本章介绍一种适用于更多方程的、更一般的试探方程法，称之为有理试探方程法.

5.1　有理试探方程法的主要步骤

第一步：对于所考虑的非线性方程

$$N(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0 \tag{2.5.1}$$

作行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=kx+\omega t$，将方程(2.5.1)约化为

$$M(u,u',u'',\cdots)=0 \tag{2.5.2}$$

第二步：作变换

$$u=\frac{a_0+a_1\varphi+\cdots+a_m\varphi^m}{b_0+b_1\varphi+\cdots+b_n\varphi^n} \tag{2.5.3}$$

和

$$\varphi'=\frac{c_0+c_1\varphi+\cdots+c_r\varphi^r}{d_0+d_1\varphi+\cdots+d_s\varphi^s} \tag{2.5.4}$$

其中，$a_0,\cdots,a_m,b_0,\cdots b_n,c_0,\cdots,c_r,d_0,\cdots,d_s$ 是待定常数.

第三步：利用方程(2.5.3)，方程(2.5.4)可取导出 u'，u''以及其他导数项. 将方程(2.5.3)，方程(2.5.4)及 u'，u''等代入方程(2.5.2)，得到关于 φ 的表达式

$$\frac{F(\varphi)}{G(\varphi)}=0 \tag{2.5.5}$$

这里 $F(\varphi)$和 $G(\varphi)$都是 φ 的多项式. 根据平衡原则，我们可以得到 $m-n$ 和 $r-s$ 的关系，从而确定 m,n,r,s 的具体值. 令多项式 $F(\varphi)$的所有系数为零，得到一个代数方程组. 解该方程组，可确定 $a_0,\cdots,a_m,b_0,\cdots b_n,c_0,\cdots,c_r,d_0,\cdots,d_s$ 的值.

第四步：解一阶常微分方程(2.5.4)，可求得 φ，再利用式(2.5.3)可写出方程(2.5.1)的精确行波解.

5.2　2+1维 KdV－Burgers 方程的精确解

考虑2+1维 KdV－Burgers 方程[19]

$$(u_t+uu_x+\alpha u_{xx}-\beta u_{xxx})_x+\gamma u_{yy}=0 \tag{2.5.6}$$

作行波变换，$u=u(\xi)$，$\xi=kx+ly+\omega t$，再积分两次，则方程(2.5.6)变为

$$u''-\frac{\alpha}{k\beta}u'=\frac{1}{2k^3\beta}u^2+\left(\frac{\omega}{k^3\beta}+\frac{l^2\gamma}{k^4\beta}\right)u+D_1\xi+D \tag{2.5.7}$$

其中，D_1,D 是任意常数.

令 $D_1=0$, $A=-\frac{\alpha}{k\beta}$, $B=\frac{1}{2k^3\beta}$, $C=\frac{\omega}{k^3\beta}+\frac{l^2\gamma}{k^4\beta}$, 则方程(2.5.7)变为

$$u''+Au'=Bu^2+Cu+D \tag{2.5.8}$$

再根据有理试探方程法的第二步,第三步,将方程(2.5.3),方程(2.5.4) 及 u',u''代入方程(2.5.8), 并根据平衡原则可得 $m-n=2(r-s-1)$. 由此我们可以确定 m,n,r,s 的具体值.

下面我们取 $m=4,n=2,r=2,s=0$. 那么,不失一般性,可取

$$u=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2+\frac{b_1}{\varphi}+\frac{b_2}{\varphi^2} \tag{2.5.9}$$

和

$$\varphi'=b_0+\varphi^2 \tag{2.5.10}$$

利用式(2.5.9),式(2.5.10)可导出 u',u'', 将这些项都代入方程(2.5.8), 最后可得到 φ 的多项式, 令多项式的所有系数为零, 得到一个代数方程组

$$6a_2-Ba_2{}^2=0$$
$$a_1+Aa_2-Ba_1a_2=0$$
$$8a_2b_0+Aa_1-Ba_1^2-2Ba_0a_2-Ca_2=0$$
$$2a_1b_0+2Aa_2b_0-2Ba_0a_1-2Ba_2b_1-Ca_1=0$$
$$2a_2b_0^2+2b_2+Aa_1b_0-Ab_1-Ba_0^2-2Ba_2b_2-2Ba_1b_1-Ca_0-D=0$$
$$2b_1b_0-2Ab_2-2Bb_1a_0-2Ba_1b_2-Cb_1=0$$
$$8b_2b_0-Ab_1b_0-Bb_1^2-2Ba_0b_2-Cb_2=0$$
$$b_1b_0^2-Ab_2b_0-Bb_1b_2=0$$
$$6b_2b_0^2-Bb_2^2=0$$

解之得 $a_2=\frac{6}{B}$, $a_1=\frac{6A}{5B}$, $a_0=-\frac{3A^2}{100B}-\frac{C}{2B}$, $b_2=\frac{3A^4}{80\,000B}$, $b_1=\frac{3A^2}{1\,000B}$, $b_0=-\frac{A^2}{400}$. 于是有 $\varphi=-\frac{A}{20}\tanh\left(\frac{A}{20}\xi-\xi_0\right)$, $\varphi=-\frac{A}{20}\coth\left(\frac{A}{20}\xi-\xi_0\right)$. 其中, ξ_0 是任意常数. 于是 2+1 维 KdV-Burgers 方程的精确行波解为

$$u_1=\frac{3k\beta^2}{50\alpha}-\frac{l^2\gamma}{k}-\omega+\frac{3k\beta^2}{25\alpha}\tanh\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]-$$
$$\frac{3k\beta^2}{100\alpha}\tanh^2\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]+\frac{3k^2\beta}{25}\coth\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]-$$
$$\frac{3k\beta^2}{100\alpha}\coth^2\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]$$

$$u_2=\frac{3k\beta^2}{50\alpha}-\frac{l^2\gamma}{k}-\omega+\frac{3k\beta^2}{25\alpha}\coth\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]-$$
$$\frac{3k\beta^2}{100\alpha}\coth^2\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]+\frac{3k^2\beta}{25}\tanh\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]-$$
$$\frac{3k\beta^2}{100\alpha}\tanh^2\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]$$

我们也可取 $m=2,n=0,r=2,s=0$,此时 2+1 维 KdV-Burgers 方程的精确行波解为

$$u_1=\frac{3k\beta^2}{50\alpha}-\frac{l^2\gamma}{k}-\omega+\frac{3k\beta^2}{25\alpha}\tanh\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]-$$

$$\frac{3k\beta^2}{100\alpha}\tanh^2\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]$$

$$u_2=\frac{3k\beta^2}{50\alpha}-\frac{l^2\gamma}{k}-\omega+\frac{3k\beta^2}{25\alpha}\coth\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]-$$

$$\frac{3k\beta^2}{100\alpha}\coth^2\left[-\frac{\beta}{20k\alpha}(kx+ly+\omega t-\xi_0)\right]$$

当然，当 $m=2,n=0,r=2,s=0$ 时也可以用第 4 章秩非齐次方程的改进多项式试探方程法来求解，求解过程会更快捷一些. 显然有理试探方程法是第 4 章秩非齐次方程的改进多项式试探方程法的进一步推广.

第 6 章　无理试探方程法及其应用

为求得更多方程的解，本章将有理试探方程法做进一步推广，给出无理试探方程法[108]及其应用.

6.1　无理试探方程法的主要步骤

第一步：对于所考虑的非线性方程

$$N(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0 \tag{2.6.1}$$

作行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=kx+\omega t$，将方程(2.6.1)约化为

$$M(u,u',u'',\cdots)=0 \tag{2.6.2}$$

第二步：取试探方程

$$u'=\sum_{i=0}^{k_1}a_iu^i+\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)\sqrt{\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i} \tag{2.6.3}$$

其中，系数 $a_0,\cdots,a_{k_1},b_0\cdots,b_{k_2},c_0,\cdots,c_{k_3}$ 均为常数. 由式(2.6.3)可导出

$$u''=\left(\sum_{i=1}^{k_1}ia_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_1}a_iu^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)\left(\sum_{i=1}^{k_2}ib_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k_3}ic_iu^{i-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k_1}a_iu^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)\left(\sum_{i=1}^{k_3}ic_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i\right)^{-\frac{1}{2}}+$$
$$\left[\left(\sum_{i=1}^{k_2}ib_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_1}a_iu^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{k_1}ia_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)\right]\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i\right)} \tag{2.6.4}$$

以及 u'''等其他导数项. 将这些项代入式(2.6.2)中，得到以下 u 的表达式

$$G(u)+H(u)\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i\right)}=0$$

这里 $G(u)$，$H(u)$都是 u 的多项式. 根据平衡原则能确定 k_1,k_2,k_3 的关系以及它们的值.

第三步：取具体的 k_1,k_2,k_3 的值，再令 $G(u)$，$H(u)$的所有系数为零，得到一个非线性代数方程组，解这个方程组，从而确定 $a_0,\cdots,a_{k_1},b_0\cdots,b_{k_2},c_0,\cdots,c_{k_3}$的值.

第四步：解方程(2.6.3)得到方程(2.6.2)的解，从而写出方程(2.6.1)相应的精确行波解.

6.2　RLW – Burgers 方程的精确解

考虑 RLW – Burgers 方程[66,68-72]

$$u_t+u_x+12uu_x-\alpha u_{xx}-\beta u_{xxt}=0 \tag{2.6.5}$$

经过行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=kx+\omega t$，并积分一次，方程(2.6.5)变为

$$u''+Au'=Bu^2+Cu+D \tag{2.6.6}$$

其中,D 是任意常数,且 $A=\frac{\alpha}{\omega\beta}, B=\frac{6}{k\beta\omega}, C=\frac{\omega+k}{k^2\beta\omega}$. 把式(2.6.3),式(2.6.4)代入式(2.6.6),并利用平衡原则得到 $2k_2+k_3-1=2$ 以及 $2k_1-1<2$. 于是我们取 $k_1=k_2=k_3=1$ 或 $k_1=0, k_2=k_3=1$.

当 $k_1=k_2=k_3=1$ 时,方程(2.6.3)变成

$$u'=a_1u+a_0+(b_1u+b_0)\sqrt{c_1u+c_0} \tag{2.6.7}$$

其中,$a_0, a_{1_1}, b_0, b_1, c_0, c_1$ 是待定参数. 由方程(2.6.7)可得

$$u''=\left[a_1+b_1\sqrt{c_1u+c_0}+\frac{c_1(b_1u+b_0)}{2\sqrt{c_1u+c_0}}\right]\left[a_1u+a_0+(b_1u+b_0)\sqrt{c_1u+c_0}\right] \tag{2.6.8}$$

将方程(2.6.7),方程(2.6.8)代入式(2.6.6)得 $G(u)+H(u)\sqrt{c_1u+c_0}=0$,其中

$$G(u)=\left(Ab_1c_1+\frac{5}{2}a_1b_1c_1\right)u^2+\left[(A+2a_1)b_1c_0+Ab_0c_1+\frac{3}{2}a_1b_0c_1+\frac{3}{2}a_0b_1c_1\right]u+$$
$$(A+a_1)b_0c_0+a_0b_1c_0+\frac{1}{2}a_0b_0c_1$$

$$H(u)=\left(\frac{3}{2}b_1{}^2c_1-B\right)u^2+(2b_1c_1b_0+b_1{}^2c_0+a_1{}^2+a_1A-C)u+b_1b_0c_0+$$
$$\frac{1}{2}c_1b_0^2+a_0a_1+a_0A-D$$

为确定参数 $a_0, a_{1_1}, b_0, b_1, c_0, c_1$,令 $G(u)\equiv 0, H(u)\equiv 0$,则得到一个代数方程组

$$\frac{3}{2}b_1^2c_1-B=0$$
$$2b_1c_1b_0+b_1^2c_0+a_1^2+a_1A-C=0$$
$$b_1b_0c_0+\frac{1}{2}c_1b_0^2+a_0a_1+a_0A-D=0$$
$$Ab_1c_1+\frac{5}{2}a_1b_1c_1=0$$
$$(A+2a_1)b_1c_0+Ab_0c_1+\frac{3}{2}a_1b_0c_1+\frac{3}{2}a_0b_1c_1=0$$
$$(A+a_1)b_0c_0+a_0b_1c_0+\frac{1}{2}a_0b_0c_1=0$$

解之得

$$\begin{cases} a_0=-\frac{12A}{5B}-\frac{AC}{5B}-\frac{6A^3}{250B} \\ a_1=-\frac{2A}{5} \\ b_1=-2 \\ b_0=-\frac{C}{B}-\frac{6A^2}{25B} \\ c_1=\frac{B}{6} \\ c_0=1+\frac{C}{12}+\frac{A^2}{100} \\ A=\pm 10 \end{cases} \tag{2.6.9}$$

于是在条件(2.6.9)下,解方程(2.6.7)可得 RLW - Burgers 方程的精确行波解

$$u_1 = \frac{k\alpha}{10}\left\{\frac{4\exp\left[\pm 4\left(kx + \frac{\alpha}{10\beta}t - \xi_0\right)\right]}{\left[1 \mp \exp\left(\pm 2\left(kx + \frac{\alpha}{10\beta}t - \xi_0\right)\right)\right]^2} - 2 - \frac{1}{12k^2\beta} - \frac{5}{6k\alpha}\right\} \tag{2.6.10}$$

$$u_2 = -\frac{k\alpha}{10}\left\{\frac{4\exp\left[\pm 4\left(kx - \frac{\alpha}{10\beta}t - \xi_0\right)\right]}{\left[1 \mp \exp\left(\pm 2\left(kx - \frac{\alpha}{10\beta}t - \xi_0\right)\right)\right]^2} - 2 + \frac{1}{12k^2\beta} - \frac{5}{6k\alpha}\right\} \tag{2.6.11}$$

其中,k,ξ_0 是任意实数.

当 $k_1=0,k_2=k_3=1$ 时,方程 RLW - Burgers 方程的精确行波解是方程(2.6.10),方程(2.6.11)的特殊情况,这里略.

6.3 耗散 Sine - Gordon 方程的精确解

考虑耗散 Sine - Gordon 方程[65,108]

$$c^2u_{xx} - u_{tt} - \gamma u_t = \alpha_1\sin u + \alpha_2\sin(2u) \tag{2.6.12}$$

经过行波变换,$u(x,t)=u(\xi),\xi=kx+\omega t$, 方程(2.6.12)变为

$$(c^2k^2 - \omega^2)u'' - \gamma\omega u' = \alpha_1\sin u + \alpha_2\sin(2u) \tag{2.6.13}$$

作变换,$v=\sin u$,则有

$$u = \arcsin v, \sin 2u = 2v\sqrt{1-v^2}$$

$$u' = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}, u'' = \frac{v''}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v(v')^2}{(\sqrt{1-v^2})^3}$$

将上面表达式代入方程(2.6.13)得

$$\frac{(c^2k^2-\omega^2)v''}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{(c^2k^2-\omega^2)v(v')^2}{(\sqrt{1-v^2})^3} - \frac{\gamma\omega v'}{\sqrt{1-v^2}} = \alpha_1 v + 2\alpha_2 v\sqrt{1-v^2} \tag{2.6.14}$$

当 $k^2=\frac{2\gamma^2\omega^2\alpha_2+\omega^2\alpha_1^2}{c^2\alpha_1^2}$时,由第二、三步,可得试探方程

$$v' = -\frac{\alpha_1}{\gamma\omega}v\sqrt{1-v^2} \tag{2.6.15}$$

解方程(2.6.15)可得耗散 Sine - Gordon 方程的精确解

$$u = \pm 2\arctan\left\{\exp\left[\pm\left(\frac{\sqrt{2\gamma^2\alpha_2+\alpha_1^2}}{c\gamma}x \pm \frac{\alpha_1}{\gamma}t - \xi_0\right)\right]\right\}$$

其中,ξ_0 为任意实数.

第 7 章　推广的无理试探方程法及其应用

本章将无理试探方程法推广到更一般的情形,我们称之为推广的无理试探方程法[108]. 前面各种试探方程法都可看作它的特殊情况.

7.1　推广的无理试探方程法的主要步骤

第一步:对于所考虑的非线性方程

$$N(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0 \tag{2.7.1}$$

作行波变换,$u(x,t)=u(\xi)$,$\xi=kx+\omega t$, 将方程(2.7.1)约化为

$$M(u,u',u'',\cdots)=0 \tag{2.7.2}$$

第二步:取试探方程

$$u'=\sum_{i=0}^{k_1}a_iu^i+\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i}{\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i}} \tag{2.7.3}$$

其中,系数 $a_0,\cdots,a_{k_1},b_0\cdots,b_{k_2},c_0,\cdots,c_{k_3},d_0,\cdots,d_{k_4}$, 均为常数. 由式(2.7.3)可导出

$$\begin{aligned}u''=&\left(\sum_{i=1}^{k_1}ia_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_1}a_iu^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)\left(\sum_{i=1}^{k_2}ib_iu^{i-1}\right)\frac{\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i}{\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i}+\\&\frac{\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)^2\left[\left(\sum_{i=1}^{k_3}ic_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i\right)-\left(\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i\right)\left(\sum_{i=1}^{k_4}id_iu^{i-1}\right)\right]}{2\left(\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i\right)^2}+\\&\frac{\left(\sum_{i=0}^{k_1}a_iu^i\right)\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{k_3}ic_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i\right)-\left(\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i\right)\left(\sum_{i=1}^{k_4}id_iu^{i-1}\right)\right]}{2\left(\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i\right)^2}\left(\frac{\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i}{\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i}\right)^{-\frac{1}{2}}+\\&\left[\left(\sum_{i=1}^{k_2}ib_iu^{i-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{k_1}a_iu^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{k_2}b_iu^i\right)\left(\sum_{i=1}^{k_1}ia_iu^{i-1}\right)\right]\frac{\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i}{\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i}\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

以及 u'''等其他导数项. 将这些项代入式(2.7.2)中, 得到以下 u 的表达式

$$G(u)+H(u)\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{k_3}c_iu^i}{\sum_{i=0}^{k_4}d_iu^i}}=0 \tag{2.7.5}$$

这里 $G(u)$,$H(u)$都是 u 的多项式. 根据平衡原则能确定 k_1,k_2,k_3,k_4 的关系以及它们的值.

第三步:取具体的 k_1,k_2,k_3,k_4 的值,再令 $G(u)$,$H(u)$的所有系数为零,得到一个非线性代数方程组,解这个方程组,从而确定 $a_0,\cdots,a_{k_1},b_0\cdots,b_{k_2},c_0,\cdots,c_{k_3},d_0,\cdots,d_{k_4}$的值.

第四步:求解方程(2.7.3)得到方程(2.7.2)的解, 从而写出方程(2.7.1)相应的精确行波解.

7.2 Fujimoto – Watanabe 方程的精确解

考虑 Fujimoto – Watanabe 方程[40,108]

$$u_t=u^3u_{xxxx}+3u^2u_xu_{xx}+3\alpha u^2u_x \tag{2.7.6}$$

经过行波变换,$u(x,t)=u(\xi)$,$\xi=kx+\omega t$, 方程(2.7.6)变为

$$\omega u'=3k\alpha u^2u'+3k^3u^2u'u''+k^3u^3u''' \tag{2.7.7}$$

利用推广的无理试探方程法 7.1 中第二、三步,可取 $k_1=k_2=0$,$k_3=3$ 以及 $k_4=2$,并且得到 $c_3=-\frac{2\alpha}{k^2}$,$c_1=-\frac{2\omega}{k^3}$,$d_2=1$,$d_1=d_0=0$,c_0 和 c_2 是两个任意实数. 简单起见, 我们取 $a_0=0$, $b_0=1$, 则试探方程为

$$u'=\sqrt{\frac{c_3u^3+c_2u^2+c_1u+c_0}{u^2}} \tag{2.7.8}$$

其中,D_1,D_2 是两个任意常数. 求解方程(2.7.8)即可得到 Fujimoto – Watanabe 方程的精确行波解

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{-\alpha}}\left(\sqrt{u-\alpha_2}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2-\alpha_1}}\arctan\frac{\sqrt{u-\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_2-\alpha_1}}\right)\quad(\alpha_2>\alpha_1) \tag{2.7.9}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{-\alpha}}\left(\sqrt{u-\alpha_2}-\frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2-\alpha_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{u-\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1-\alpha_2}}{\sqrt{u-\alpha_2}+\sqrt{\alpha_1-\alpha_2}}\right|\right)\quad(\alpha_2<\alpha_1) \tag{2.7.10}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{-\alpha}}\left(\sqrt{u-\alpha_1}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{u-\alpha_1}}\right) \tag{2.7.11}$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{2\sqrt{-2\alpha(\alpha_1-\alpha_2)}}{k}\left[\alpha_1F(\varphi,l)-(\alpha_1-\alpha_3)E(\varphi,l)+(\alpha_1-\alpha_3)\tan\varphi\sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}\right]\quad(\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3) \tag{2.7.12}$$

其中, $l^2=\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}$, $F(\varphi,l)=\int_0^\varphi\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\psi}}$, $E(\varphi,l)=\int_0^\varphi\sqrt{1-l^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是多

项式方程 $u^3-\frac{k^2c_2}{2\alpha}u^2+\frac{\omega}{k\alpha}u-\frac{k^2c_0}{2\alpha}=0$ 的根.

当然，我们还可以取 k_1,k_2,k_3,k_4 的其他值，计算过程与前面类似，这里略.



第3编　射影 Riccati 方程方法的统一格式及其应用

在这一部分,我们给出射影 Riccati 方程方法的统一格式,研究这个方法的数学基础，并指出射影 Riccati 方程方法的局限性[94]，并且利用这个射影 Riccati 方程方法的统一格式求几个非线性数学物理方程的精确解.

第1章　射影 Riccati 方程方法的统一格式及主要结论

1.1　射影 Riccati 方程方法的统一格式

射影 Riccati 方程方法是构造非线性数学物理方程精确解的一种有效方法,多年来被人们广泛研究[95-102]。在文献[95]中，Conte 等提出了一种具有一般性的寻求某些非线性数学物理方程更多新孤立子解的方法，那些解能表达成一个由满足射影 Riccati 方程[96]的两个初等函数构成的多项式. 后来,Yan[97]发展了 Conte 的方法并提出了更一般的射影 Riccati 方程方法. 许多作者[100-102]利用 Yan 的方法求解了许多非线性数学物理方程. 我们根据各种射影 Riccati 方程方法的格式，给出射影 Riccati 方程方法的统一格式.

对于给定的非线性偏微分方程

$$N(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0 \tag{3.1.1}$$

考虑它的行波解

$$\begin{cases}u(x,t)=u(\xi)\\ \xi=\omega x+ct\end{cases} \tag{3.1.2}$$

那么，方程(3.1.1)就变成如下非线性常微分方程

$$M(u,u',u'',\cdots)=0 \tag{3.1.3}$$

第一步：将方程(3.1.3)的解表达成以下形式

$$u(\xi)=H_1(f)+gH_2(f)=\sum_{i=0}^{m_1}b_if^i+g\sum_{i=0}^{m_2}c_if^i \tag{3.1.4}$$

这里，$f=f(\xi)$ 是下面常微分方程的一个解

$$f'=fg \tag{3.1.5}$$

$$\begin{cases}g^2=F(f)=\sum\limits_{i=0}^{m_3}a_if^i\\ g'=\dfrac{1}{2}F'(f)f\end{cases} \tag{3.1.6}$$

其中，m_1,m_2,m_3 是非负整数. 由方程 (3.1.4)，方程(3.1.5)及式(3.1.6) 可以得到以下方

程

$$u' = H'_1(f)fg + \frac{1}{2}F'(f)fH_2(f) + H'_2(f)fF(f) \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned} u'' = & H''_1(f)f^2F(f) + H'_1(f)fF(f) + \frac{1}{2}H'_1(f)f^2F'(f) + \\ & \frac{1}{2}F''(f)H_2(f)f^2g + \frac{1}{2}F'(f)H_2(f)fg + \frac{3}{2}F'(f)H'_2(f)f^2g + \\ & H''_2(f)F(f)f^2g + H'_2(f)F(f)fg \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

等等. 把这些方程如式(3.1.4),式(3.1.7)及式(3.1.8)带入方程 (3.1.3),并利用方程(3.1.5)和方程(3.1.6)得到如下方程

$$G_1(f) + gG_2(f) = 0 \tag{3.1.9}$$

这里 $G_1(f)$ 和 $G_2(f)$ 都是 f 的多项式.

第二步: 根据平衡原则, 可以求出 m_3, m_1 和 m_2 的关系, 从而确定它们各种不同的取值.

第三步: 令 $G_1(f)$ 和 $G_2(f)$ 的各幂项系数为零, 会得到一个代数方程组, 解方程组可得 $a_i(i=0,1,\cdots,m_3)$, $b_i(i=0,1,\cdots,m_1)$, $c_i(i=0,1,\cdots,m_2)$ 的值. 当然, 方程组可能会无解, 这说明当 m_3, m_1 和 m_2 取相应的值时, 用这里提出的射影 Riccati 方程方法不能求解方程(3.1.3).

第四步: 由方程(3.1.6), 方程(3.1.5)可写成以下形式

$$(f')^2 = f^2F(f) \tag{3.1.10}$$

那么, 方程 (3.1.10) 就可以约化成初等积分形式

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{F(f)}} \tag{3.1.11}$$

第五步: 把 $a_i(i=0,1,\cdots,m_3)$ 代入方程 (3.1.11), 并利用 m_3 阶多项式的完全判别系统法, 就可以求解方程(3.1.11), 并且能够求出方程(3.1.10)的精确解. 从而, 方程(3.1.3)的精确解就能相应的求出来.

容易看出, 一般的射影 Riccati 方程方法是这里提出的方法的特殊情况: 如果令 $m_1 = n$, $m_2 = n-1$, $m_3 = 2$, 那么射影 Riccati 方程方法的统一格式就是文献[100]中提出的射影 Riccati 方程方法; 如果令 $m_1 = m$, $m_2 = m-1$, $m_3 = 2$, 那么射影 Riccati 方程方法的统一格式就是文献[102]中提出的射影 Riccati 方程方法, 等等.

1.2 射影 Riccati 方程方法统一格式的主要结论

为了清晰地表达这些结论, 不妨考虑方程 (3.1.3) 的如下形式

$$u'' + \alpha u' = \sum_{i=0}^{k} d_i u^i \tag{3.1.12}$$

这里 $\alpha, d_i(i=0,1,\cdots,k)$ 都是任意常数, k 是正整数. 许多实际模型例如 BBM - Burgers 方程都能约化成这个方程. 这里我们得到了方程(3.1.12)的一些奇特的结果. 下面的定理表明射影 Riccati 方程方法有某些局限性. 对于方程(3.1.12), 由第一步和第二步可以得到 m_1, m_2 和 m_3 的一些关系, 例如, 如果 $k=2$, 那么 $m_2 \leqslant \frac{m_1}{2}$ 及 $m_3 = m_1$; 如果 $k=3$, 那么 $m_2 = 0$ 及 $1 \leqslant m_1 \leqslant \frac{m_3}{2}$. 于是, m_1, m_2 和 m_3 的各种可能的取值就可以得到了. 在 m_1, m_2 和 m_3 的这些取值

中，当取其中的某些值时，方程(3.1.12)就可以用射影 Riccati 方程方法的统一格式求解；但是，当取其中的另外一些值时却无法用这种方法求出方程(3.1.12)的解. 在这里我们给出以下定理.

定理 1 至少在以下几种情形下，利用射影 Riccati 方程方法的统一格式可以求出方程(3.1.12)的非平凡解.

情形 1：当 $k=2$ 时，(1) $m_3=m_1=1, m_2=0$，或 (2) $m_3=m_1=4, m_2=0$；

情形 2：当 $k=3$ 时，(1) $m_3=2, m_1=1, m_2=0$，或 (2) $m_3=4, m_1=2, m_2=0$.

证明：简单起见，这里仅证明情形 2 的(1). 当 $k=3$ 时，方程(3.1.12)变成

$$u''+\alpha u' = d_3u^3+d_2u^2+d_1u+d_0 \tag{3.1.13}$$

把方程(3.1.4)，方程(3.1.7)和方程(3.1.8)代入方程(3.1.13)，并利用方程(3.1.5)和方程(3.1.6)，得到方程(3.1.9)，这里

$$\begin{aligned}G_1(f) = {} & H''_1(f)f^2F(f)+H'_1(f)fF(f)+\frac{1}{2}H'_1(f)f^2F'(f)+\\ & \frac{1}{2}\alpha F'(f)fH_2(f)+\alpha H'_2(f)fF(f)-d_3[H_1(f)]^3-d_2[H_1(f)]^2-\\ & 3d_3F(f)H_1(f)[H_2(f)]^2-d_2F(f)[H_2(f)]^2-d_1H_1(f)-d_0\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

$$\begin{aligned}G_2(f) = {} & \frac{1}{2}F''(f)H_2(f)f^2+\frac{1}{2}F'(f)H_2(f)f+\frac{1}{2}F'(f)H'_2(f)f^2-d_1H_2(f)+\\ & H''_2(f)F(f)f^2+H'_2(f)F(f)f+H'_2(f)F'(f)f^2+\alpha H'_1(f)f-\\ & 3d_3[H_1(f)]^2H_2(f)-d_3F(f)[H_2(f)]^3-2d_2H_1(f)H_2(f)\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

由第二步知，m_3 可取 2，m_1 可取 1，m_2 可取 0，即 $m_3=2, m_1=1, m_2=0$. 于是有

$$\begin{cases}H_1(f) = \sum\limits_{i=0}^{1} b_if^i\\ H_2(f) = c_0\\ F(f) = \sum\limits_{i=0}^{2} a_if^i\end{cases} \tag{3.1.16}$$

把式(3.1.16) 代入式(3.1.14)和式(3.1.15)，再利用第三步，令 f 的各幂项系数为零，可得以下代数方程组

$$\begin{gathered}2a_2c_0-3d_3b_1^2c_0-d_3a_2c_0^3=0\\ \alpha b_1-6d_3b_1b_0c_0-d_3a_1c_0^3-2d_2b_1c_0=0\\ 3d_3b_0^2c_0+d_3a_0c_0^3+2d_2b_0c_0+d_1c_0=0\\ 2b_1a_2-d_3b_1^3-3c_0^2d_3a_2b_1=0\\ b_1a_1+\alpha a_2c_0-3d_3b_1^2b_0-3d_3c_0^2a_2b_0-3d_3c_0^2a_1b_1-d_2b_1^2-d_2a_2c_0^2=0\\ b_1a_0-3d_3b_1b_0^2-3d_3c_0^2a_1b_0-3d_3c_0^2a_0b_1-2d_2b_1b_0-d_2a_1c_0^2-d_1b_1=0\\ d_3b_0^3+3d_3c_0^2a_0b_0+d_2b_0^2+d_2a_0c_0^2+d_1b_0+d_0=0\end{gathered}$$

解上面方程组知，至少有以下解：$c_0^2=\dfrac{1}{2d_3}, b_0=\dfrac{\alpha-2d_2c_0}{6d_3c_0}, a_0=\dfrac{2d_2{}^2-\alpha^2d_3-6d_1d_3}{3d_3}, a_2=2d_3b_1{}^2$，$b_1$ 是任意非零常数，a_1 是任意常数. 而且 $\alpha, d_3, d_2, d_1, d_0$ 满足表达式 $2\alpha^2d_3-3\alpha d_2^2+9\alpha d_1d_3=c_0(2d_2^3-9d_1d_2d_3+27d_0d_3^2)$.

这表明方程(3.1.12)在 $k=3$，同时 $m_3=2, m_1=1, m_2=0$ 时有非平凡解. 定理 1 证毕.

定理2 至少在以下几种情形下，利用射影 Riccati 方程方法的统一格式不能求出方程(3.1.12)的非平凡解.

情形1：当 $k=2$ 时，(1) $m_3=m_1=3, m_2=1$，或 (2) $m_3=m_1=4, m_2=1$；

情形2：当 $k=3$ 时，(1) $m_3=3, m_1=1, m_2=0$，或 (2) $m_3=4, m_1=1, m_2=0$.

证明：简单起见，这里仅证明情形2的(1). 当 $k=3$ 时，方程(3.1.12)变成(3.1.13)，相应地，有

$$\begin{cases} H_1(f) = \sum_{i=0}^{1} b_i f^i \\ H_2(f) = c_0 \\ F(f) = \sum_{i=0}^{3} a_i f^i \end{cases} \tag{3.1.17}$$

由第三步，可得以下代数方程组

$$\frac{9}{2}a_3c_0 - d_3c_0^3a_3 = 0 \tag{3.1.18}$$

$$2a_2c_0 - 3d_3b_1^2c_0 - d_3a_2c_0^3 = 0 \tag{3.1.19}$$

$$\frac{1}{2}a_1c_0 + \alpha b_1 - 6d_3b_1b_0c_0 - d_3c_0^3a_1 - 2d_2b_1c_0 = 0 \tag{3.1.20}$$

$$2d_2b_0c_0 + d_1c_0 + 3d_3b_0^2c_0 + d_3c_0^3a_0 = 0 \tag{3.1.21}$$

$$\frac{5}{2}b_1a_3 - 3d_3a_3b_1c_0^2 = 0 \tag{3.1.22}$$

$$2b_1a_2 + \frac{3}{2}\alpha a_3c_0 - d_3b_1^3 - 3d_3a_3b_0c_0^2 - 3d_3a_2b_1c_0^2 - d_2a_3c_0^2 = 0 \tag{3.1.23}$$

$$\frac{3}{2}b_1a_1 + \alpha a_2c_0 - 3d_3b_0b_1^2 - 3d_3a_2b_0c_0^2 - 3d_3a_1b_1c_0^2 - d_2b_1^2 - d_2a_2c_0^2 = 0 \tag{3.1.24}$$

$$b_1a_0 + \frac{1}{2}\alpha a_1c_0 - 3d_3b_1b_0^2 - 3d_3a_1b_0c_0^2 - 3d_3a_0b_1c_0^2 - 2d_2b_1b_0 - d_2a_1c_0^2 - d_1b_1 = 0 \tag{3.1.25}$$

$$d_3b_0^3 + 3d_3a_0b_0c_0^2 + d_2b_0^2 + d_2a_0c_0^2 + d_1b_0 + d_0 = 0 \tag{3.1.26}$$

由方程(3.1.18)和方程(3.1.22)知 $c_0^2=\frac{9}{2d_3}$ 及 $c_0^2=\frac{5}{6d_3}$，这是矛盾的，因为 a_3, c_0, d_3 都是非零的正整数. 故上面的代数方程组无解. 于是易知，当 $k=3$，同时 $m_3=3, m_1=1, m_2=0$ 时，利用射影 Riccati 方程方法的统一格式不能求出方程(3.1.12)的非平凡解. 其他几种情形可以类似证明. 定理2证毕.

定理3 当 $k\geqslant 4$ 时，利用射影 Riccati 方程方法的统一格式不能求出方程(3.1.12)的非平凡解.

证明：当 $k\geqslant 4$ 时，很容易知道，不管 m_3, m_1 和 m_2 取何非负整数，都无法平衡 $G_1(f)$ 和 $G_2(f)$ 的最高阶导数项和最高阶非线性项.

注：由以上结果可知，射影 Riccati 方程方法具有局限性. 而且前面提出的射影 Riccati 方程方法的统一格式还可以进一步发展，如，在方程(3.1.4)和方程(3.1.6)中取 $H_1(f), H_2(f)$ 及 $F(f)$ 为有理函数.

第 2 章　射影 Riccati 方程方法统一格式的应用

2.1　Fitzhugh – Nagumo 方程的精确解

考虑 Fitzhugh – Nagumo 方程[91]

$$u_t - u_{xx} = u(u-\eta)(1-u) \tag{3.2.1}$$

作行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=\omega x+ct$，将方程(3.2.1)约化为

$$u'' + \alpha u' = d_3u^3 + d_2u^2 + d_1u \tag{3.2.2}$$

其中，$\alpha=-\frac{\omega}{k^2}, d_3=\frac{1}{k^2}, d_2=-\frac{1+\eta}{k^2}, d_1=\frac{\eta}{k^2}$.

由定理 1，若取 $m_3=2, m_1=1, m_2=0$，则方程(3.2.2)有解，解的表达形式为

$$u(\xi) = b_1f + b_0 \pm c_0\sqrt{a_2f^2 + a_1f + a_0} \tag{3.2.3}$$

并由定理 1 的证明过程知 $c_0^2=\frac{1}{2d_3}, b_0=\frac{\alpha-2d_2c_0}{6d_3c_0}$，$a_0=\frac{2d_2{}^2-\alpha^2d_3-6d_1d_3}{3d_3}, a_2=2d_3b_1^2$，$b_1$ 是任意非零常数，a_1 是任意常数. 而且 α, d_3, d_2, d_1 满足表达式

$$2\alpha^2d_3 - 3\alpha d_2^2 + 9\alpha d_1d_3 = c_0(2d_2^3 - 9d_1d_2d_3)$$

此时方程(3.1.11) 变成

$$\pm(\xi-\xi_0) = \int\frac{df}{f\sqrt{a_2f^2 + a_1f + a_0}} \tag{3.2.4}$$

令 $\Delta=a_1^2-4a_0a_2$，这里 Δ 是多项式 $a_0+a_1f+a_2f^2$ 的判别式. 方程(3.2.4)的所有解的分类有以下三种情形.

情形 1：$\Delta=0$. 由方程(3.2.4)得

$$\pm\frac{a_1}{2a_2}\sqrt{|a_2|}(\xi-\xi_0) = \ln\left|\frac{f-\frac{a_1}{2a_1}}{f}\right| \tag{3.2.5}$$

情形 2：$\Delta>0$. 由方程(3.2.4)得

$$\pm\sqrt{a_2}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{(-\gamma)(f-\beta)} - \sqrt{(-\beta)(f-\gamma)}]^2}{|f|} \tag{3.2.6}$$

$$\pm\sqrt{a_2}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}\ln\frac{[\sqrt{\gamma(f-\beta)} - \sqrt{\beta(f-\gamma)}]^2}{|f|} \tag{3.2.7}$$

$$\pm\sqrt{a_2}(\xi-\xi_0) = \frac{1}{\sqrt{-\beta\gamma}}\arcsin\frac{(-\gamma)(f-\beta)+(-\beta)(f-\gamma)}{|f||\beta-\gamma|} \tag{3.2.8}$$

这里假设表达式(3.2.6)～(3.2.8)中根号内部分都大于零，其中 $\beta=\frac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}$，$\gamma=$

$\dfrac{-a_1-\sqrt{\Delta}}{2a_2}$.

情形3:$\Delta<0$. 由方程(3.2.4)得

$$\pm a_0(\xi-\xi_0)=\ln\left|\frac{-\dfrac{1}{2a_1\sqrt{a_0}}f+\sqrt{a_0}-\sqrt{a_2f^2-a_1f+a_0}}{f}\right|\quad(a_0>0)\tag{3.2.9}$$

将以上求得的f代入(3.2.3)即可得到 Fitzhugh - Nagumo 方程的精确行波解.

例如,将式(3.2.5)代入式(3.2.3),得到 Fitzhugh - Nagumo 方程的一个精确行波解

$$u(\xi)=\pm c_0\sqrt{a_2\left[\frac{\dfrac{a_1}{2a_2}}{1\mp e^{\pm\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)(\xi-\xi_0)}}\right]^2+a_1\left[\frac{\dfrac{a_1}{2a_2}}{1\mp e^{\pm\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)(\xi-\xi_0)}}\right]+a_0}\ \frac{\dfrac{a_1}{2a_2}}{1\mp e^{\pm\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)(\xi-\xi_0)}}b_1+b_0$$

其他的可以类似得到, 这里略.

2.2 BBM - Burgers 方程的精确解

考虑 BBM - Burgers 方程[72]

$$u_t+u_x+uu_x-\lambda u_{xx}-\beta u_{xxt}=0\tag{3.2.10}$$

作行波变换,$u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=\omega x+ct$,并积分一次,且将方程(3.2.10)约化为

$$u''+\alpha u'=d_2u^2+d_1u+d_0\tag{3.2.11}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\lambda}{c\beta}\\ d_2=\dfrac{1}{2\beta\omega c}\\ d_1=\dfrac{\omega+c}{\beta\omega^2c}\\ d_0\text{ 是任意常数}\end{cases}\tag{3.2.12}$$

由定理1, 若取 $m_3=m_1=1$, $m_2=0$, 则方程(3.2.11)有解. 故有

$$\begin{cases}F(f)=a_1f+a_0\\ H_1(f)=b_1f+b_0\\ H_2(f)=c_0\end{cases}\tag{3.2.13}$$

将方程(3.2.13)代入方程(3.1.14)和方程(3.1.15), 并令f的各幂项系数为零, 则得到下面的代数方程组

$$\frac{1}{2}a_1c_0+\alpha b_1-2d_2b_1c_0=0$$

$$2d_2b_0c_0+d_1c_0=0$$

$$\frac{3}{2}b_1a_1-d_2b_1^2=0$$

$$b_1a_0+\frac{1}{2}\alpha a_1c_0-2d_2b_1b_0-d_2a_1c_0^2-d_1b_1=0$$

$$d_2b_0^2+d_2a_0c_0^2+d_1b_1+d_0=0$$

解之得如下解：$b_0=-\frac{d_1}{2d_2}, c_0=\frac{3\alpha}{5d_2}$，$a_0=\frac{\alpha^2}{25}$，$a_1=\frac{2}{3}d_2b_1, b_1$ 是任意非零常数，并且 $36\alpha^2-625d_1^2+2\,500d_2d_0=0$.

由方程(3.2.13)，方程(3.1.11)变成

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{a_1f+a_0}}$$

解之得

$$\pm(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\ln\frac{\sqrt{a_1f+a_0}-\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_1f+a_0}+\sqrt{a_0}}\quad(a_0>0)$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=-\frac{2}{\sqrt{-a_0}}\arctan\sqrt{\frac{-a_0}{a_1f+a_0}}\quad(a_0<0)$$

$$\pm(\xi-\xi_0)=-\frac{2}{\sqrt{a_1f}}\quad(a_0=0)$$

此时方程(3.2.10)的精确行波解的表达形式为

$$u(\xi)=b_1f+b_0\pm c_0\sqrt{a_1f+a_0}$$

于是 BBM – Burgers 方程(3.2.10)的精确行波解为

$$u_1(x,t)=\frac{a_0b_1}{a_1}\left[\frac{(\mathrm{e}^{\pm\sqrt{a_0}(\xi-\xi_0)}+1)^2}{(\mathrm{e}^{\pm\sqrt{a_0}(\xi-\xi_0)}-1)^2}-1\right]+b_0\pm c_0\sqrt{a_0}\,\frac{\mathrm{e}^{\pm\sqrt{a_0}(\xi-\xi_0)}+1}{\mathrm{e}^{\pm\sqrt{a_0}(\xi-\xi_0)}-1}$$

$$u_2(x,t)=\frac{-a_0b_1\left\{\tan^2\left[\frac{\sqrt{-a_0}}{2}(\xi-\xi_0)\right]+1\right\}}{a_1\tan^2\left[\frac{\sqrt{-a_0}}{2}(\xi-\xi_0)\right]}+b_0\pm\frac{c_0\sqrt{-a_0}}{\tan\left[\frac{\sqrt{-a_0}}{2}(\xi-\xi_0)\right]}$$

$$u_3(x,t)=\frac{4b_1}{a_1(\xi-\xi_0)^2}+b_0\pm c_0\sqrt{\frac{4}{(\xi-\xi_0)^2}+a_0}$$

2.3 广义 KPP 方程的精确解

考虑广义 KPP 方程

$$u_t-u_{xx}+\rho u+\lambda u^2+\delta u^3+c=0\tag{3.2.14}$$

作行波变换，$u(x,t)=u(\xi)$，$\xi=kx+\omega t$，将方程(3.2.14)约化为

$$u''+\eta u'=d_3u^3+d_2u^2+d_1u+d_0\tag{3.2.15}$$

其中，$\eta=-\frac{\omega}{k^2}, d_3=\frac{\delta}{k^2}, d_2=\frac{\lambda}{k^2}, d_1=\frac{\rho}{k^2}$，$d_0=\frac{c}{k^2}$.

由定理 1，若取 $m_3=4, m_1=2, m_2=0$，则方程(3.2.15)有解，那么方程(3.2.15)的解的形式为

$$u(\xi)=b_2f^2+b_1f+b_0\pm c_0\sqrt{a_4f^4+a_3f^3+a_2f^2+a_1f+a_0}\tag{3.2.16}$$

为此,我们首先确定常数 $b_i, i=0,\cdots,2$; $a_i=0,\cdots,4$ 和 c_0. 将方程(3.2.16)代入方程(3.1.14)和方程(3.1.15),并令 f 的各幂项系数为零,则得到下面的代数方程组

$$8a_4c_0 - c_0^3a_4d_3 - 3d_3c_0b_2^2 = 0$$

$$\frac{9}{2}c_0a_3 - d_3c_0^3a_3 - 6d_3c_0b_2b_1 = 0$$

$$2a_2c_0 + 2\eta b_2 - d_3c_0^3a_2 - 3d_3c_0b_1^2 - 6d_3b_0c_0b_2^2 - 2d_2b_2c_0 = 0$$

$$\frac{1}{2}c_0a_1 + \eta b_1 - d_3c_0^3a_1 - 6d_3b_0c_0b_1 - 2d_2b_1c_0 = 0$$

$$d_3c_0^3a_0 + 3d_3b_0^2c_0 + 2d_2b_0c_0 + d_1c_0 = 0$$

$$8b_2a_4 - d_3b_2^3 - 3d_3c_0^2b_2a_4 = 0$$

$$4b_2a_3 + b_1a_4 + 3b_2a_3 + 2b_1a_4 - 3d_3b_2^2b_1 - 3d_3c_0^2b_2a_3 - 3d_3c_0^2b_1a_4 = 0$$

$$4b_2a_2 + b_1a_3 + 2b_2a_2 + \frac{3}{2}b_1a_3 + 2\eta c_0a_4 - 3d_3b_2b_1^2 - 3d_3b_0c_0^2a_4 -$$

$$3d_3c_0^2b_2a_2 - 3d_3c_0^2b_1a_3 - d_2b_2^2 - d_2c_0^2a_4 - 3d_3b_2^2b_0 = 0$$

$$d_3b_1^3 + d_3b_0^3 + 3d_3b_0c_0^2a_3 + 6d_3b_2b_1b_0 + 3d_3c_0^2b_2a_1 + 3d_3c_0^2b_1a_2 + 2d_2b_2b_1 + d_2a_3c_0^2 -$$

$$5b_2a_1 - 2b_1a_2 - \frac{3}{2}\eta c_0a_3 = 0$$

$$4b_2a_0 + \frac{3}{2}b_1a_1 + \eta a_2c_0 - 3d_3b_0c_0^2a_2 - 3d_3b_1^2b_0 - 3d_3b_0^2b_2 - 3d_3c_0^2b_2a_0 - 3d_3c_0^2b_1a_1 -$$

$$d_2b_1^2 - d_2c_0^2a_2 - 2d_2b_2b_0 - d_1b_2 = 0$$

$$b_1a_0 + \frac{\eta}{2}c_0a_1 - 3d_3b_0c_0^2a_1 - 3d_3b_0^2b_1 - 3d_3b_1c_0^2a_0 - d_2c_0^2a_1 - 2d_2b_1b_0 - d_1b_1 = 0$$

$$b_0^3d_3 + 3d_3b_0c_0^2a_0 + d_2b_0^2 + d_2c_0^2a_0 + d_1b_0 + d_0 = 0$$

解之得一组解为

$$\begin{cases} a_4 = \dfrac{d_3}{2} \\ a_3 = a_1 = 0 \\ a_0 = -\dfrac{d_1}{2} \\ b_2 = 1 \\ b_1 = b_0 = 0 \\ c_0 = \pm\sqrt{\dfrac{2}{d_3}} \\ a_2 \text{ 是任意实数} \\ \mu, d_3, d_2, d_1 \text{ 满足表达式 } \eta = \pm d_2\sqrt{\dfrac{2}{d_3}} \\ d_1d_2 = d_3d_0 \end{cases} \tag{3.2.17}$$

下面只需在满足条件(3.2.17)的情况下,求解方程(3.1.11),将求得的 f 代入式(3.2.16),即可求得方程(3.2.15)的解.

在条件(3.2.17)下,$d_3>0$ 时,此时方程(3.1.11) 变成

$$\pm\sqrt{\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{f^4+\frac{2a_2}{d_3}f^2-\frac{d_1}{d_3}}}\tag{3.2.18}$$

当 $d_3<0$ 时,此时方程(3.1.11) 变成

$$\pm\sqrt{-\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\int\frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{-\left(f^4+\frac{2a_2}{d_3}f^2-\frac{d_1}{d_3}\right)}}\tag{3.2.19}$$

记多项式 $F(f)=f^4+\frac{2a_2}{d_3}f^2-\frac{d_1}{d_3}$,根据四阶多项式完全判别系统法知，方程(3.2.18),方程(3.2.19)的解有以下七种情形.

情形1:$D_2=0,D_3=0,D_4=0$. $F(f)$ 有四重零实根,即 $F(f)=f^4$. 则当 $d_3>0$ 时，由方程(3.2.18)可得

$$f=\pm(2d_3)^{-\frac{1}{4}}(\xi-\xi_0)^{-\frac{1}{2}}\tag{3.2.20}$$

情形2:$D_2<0,D_3=0,D_4=0$. $F(f)$有一对二重共轭复根,$F(f)=[(f-l_1)^2+s_1{}^2]^2$,这里 l_1,s_1 是实数,$s_1>0$. 当 $d_3>0$ 时，如果 $l_1^2\neq-s_1^2$,则由方程(3.2.18)可得

$$\pm\sqrt{\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{l_1^2+s_1^2}\left\{\ln|f|-\frac{1}{2}\ln[s_1^2+(f-l_1^2)^2]+\frac{l_1}{s_1}\arctan\frac{f-l_1}{s_1}\right\}\tag{3.2.21}$$

这里 ξ_0是积分常数.

情形3:$D_2>0,D_3>0,D_4=0$. $F(f)$ 有一个二重实根和两个一重实根，即 $F(f)=(f-\alpha)^2(f-\beta)(f-\gamma)$，这里 α,β,γ 都是实数，且 $\beta>\gamma$. 若 $d_3>0$,当 $\alpha>\beta,f>\beta,\beta<0$ 时,或者当 $\alpha<\gamma,f<\gamma,\gamma>0$ 时,方程(3.2.18)的解为

$$\pm\alpha\sqrt{\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\beta\gamma}\ln\frac{[\sqrt{\gamma(\beta-f)}-\sqrt{\beta(\gamma-f)}]^2}{|f|}-\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\ln\frac{[\sqrt{(\alpha-\gamma)(f-\beta)}-\sqrt{(\alpha-\beta)(f-\gamma)}]^2}{|f-\alpha|}\tag{3.2.22}$$

当 $\alpha>\beta,f<\gamma,\beta<0$ 时，或者当 $\alpha<\gamma,f<\beta,\gamma>0$ 时，由方程(3.2.18)可得

$$\pm\alpha\sqrt{\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\beta\gamma}\ln\frac{[\sqrt{(f-\beta)\gamma}-\sqrt{\beta(f-\gamma)}]^2}{|f|}-\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\ln\frac{[\sqrt{(f-\beta)(\gamma-\alpha)}-\sqrt{(\beta-\alpha)(f-\gamma)}]^2}{|f-\alpha|}\tag{3.2.23}$$

当 $\beta>\alpha>\gamma,\beta>0,\gamma<0$ 时,方程(3.2.18)的解为

$$\pm\alpha\sqrt{\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{-\beta\gamma}\arcsin\frac{\gamma(\beta-f)-\beta(f-\gamma)}{|(\beta-\gamma)f|}-\frac{1}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)}}\arcsin\frac{(\alpha-\gamma)(f-\beta)+(\alpha-\beta)(f-\gamma)}{|(\beta-\gamma)(f-\alpha)|}\tag{3.2.24}$$

若 $d_3<0$,当 $\alpha>\beta,f>\beta,\beta<0$ 时,或者当 $\alpha<\gamma,f<\gamma,\gamma>0$ 时,方程(3.2.19)的解为

$$\pm\alpha\sqrt{-\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{-\beta\gamma}\ln\frac{[\sqrt{(f-\beta)\gamma}-\sqrt{\beta(f-\gamma)}]^2}{|f-\alpha|}-\frac{1}{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)}$$

$$\ln\frac{[\sqrt{(-f+\beta)(\alpha-\gamma)}-\sqrt{(\beta-\alpha)(f-\gamma)}]^2}{|f-\alpha|} \tag{3.2.25}$$

当 $\alpha>\beta, f<\gamma, \beta<0$ 时，或者当 $\alpha<\gamma, f<\beta, \gamma>0$ 时，方程(3.2.19)的解为

$$\pm\alpha\sqrt{-\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{-\beta\gamma}\ln\frac{[\sqrt{(-f+\beta)\gamma}-\sqrt{-\beta(f-\gamma)}]^2}{|f-\alpha|}-\frac{1}{(\beta-\alpha)(\alpha-\gamma)}$$
$$\ln\frac{[\sqrt{(-f+\beta)(\gamma-\alpha)}-\sqrt{(\alpha-\beta)(f-\gamma)}]^2}{|f-\alpha|} \tag{3.2.26}$$

当 $\beta>\alpha>\gamma, \beta>0, \gamma<0$ 时，方程(3.2.19)的解为

$$\pm\alpha\sqrt{-\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{1}{\beta\gamma}\arcsin\frac{(f-\beta)\gamma+\beta(f-\gamma)}{|(f-\alpha)(\beta-\gamma)|}-\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$
$$\arcsin\frac{(-f+\beta)(\alpha-\gamma)+(\beta-\alpha)(f-\gamma)}{|(f-\alpha)(\beta-\gamma)|} \tag{3.2.27}$$

情形4：$D_4=0, D_2D_3<0$，$F(f)$ 有一个二重实根和一对共轭复根，即 $F(f)=(f-\alpha)^2[(f-l)^2+s^2]$. 如果 $d_3>0$，方程(3.2.18)的解为

$$f=\frac{(e^{\pm\alpha\sqrt{\frac{d_3}{2}(l^2+s^2)}(\xi-\xi_0)}-\gamma_1)+\sqrt{l^2+s^2}(2-\gamma_1)}{(e^{\pm\alpha\sqrt{\frac{d_3}{2}(l^2+s^2)}(\xi-\xi_0)}-\gamma_1)^2-1}-$$
$$\frac{(e^{\pm\alpha\sqrt{\frac{d_3}{2}((\alpha-l)^2+s^2)}(\xi-\xi_0)}-\gamma_2)+\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}(2-\gamma_2)}{(e^{\pm\alpha\sqrt{\frac{d_3}{2}((\alpha-l)^2+s^2)}(\xi-\xi_0)}-\gamma_2)^2-1} \tag{3.2.28}$$

其中，$\gamma_1=\frac{-2l}{\sqrt{l^2+s^2}}, \gamma_2=\frac{\alpha-2l}{\sqrt{(\alpha-l)^2+s^2}}$.

情形5：$D_4>0, D_3>0, D_1>0$. $F(f)$ 有四个实根，即 $F(f)=(f-\alpha_1)(f-\alpha_2)(f-\alpha_3)(f-\alpha_4)$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是实数，$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4$. 如果 $d_3>0$，当 $f\geqslant\alpha_1$ 或 $f\leqslant\alpha_4$ 时，方程(3.2.18)的解为

$$\pm\sqrt{\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{2\delta}{a\gamma}\left\{cF(\varphi,k)+\frac{\delta}{b}\prod\left(\varphi,\frac{a}{b},k\right)\right\} \tag{3.2.29}$$

其中，$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}$，$k^2=\frac{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$，$F(\varphi,k)=\int_0^\varphi\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$，

$\prod\left(\varphi,\frac{a}{b},k\right)=\int\frac{d\psi}{\left(1+\frac{a}{b}\sin^2\psi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$，$a=\alpha_1(\alpha_1-\alpha_4)$，$b=-\alpha_1(\alpha_2-\alpha_4)$，$c=\alpha_1-\alpha_4$，$\delta=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_4)$.

如果 $d_3<0$，当 $f\geqslant\alpha_2$ 且 $f\leqslant\alpha_1$ 时，方程(3.2.19)的解为

$$\pm\sqrt{-\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{2\delta}{a\gamma}\left\{cF(\varphi,k)+\frac{\delta}{b}\prod\left(\varphi,\frac{a}{b},k\right)\right\} \tag{3.2.30}$$

其中，$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}$，$k^2=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}$，$a=\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)$，$b=-\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)$，$c=\alpha_1-\alpha_2$，$\delta=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)$.

情形6：$D_4<0, D_2D_3\geqslant0$，$F(f)$ 有两个不同的实根和一对共轭复根，即 $F(f)=(f-\alpha)$

$(f-\beta)[(f-l_1)^2+s_1^2]$，其中 $\alpha>\beta,l_1,s_1>0$，是实数. 当 $d_3>0$ 时，方程(3.2.18)的解为

$$\pm\sqrt{\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{-c\delta}{a\gamma}F(\varphi,k)-\frac{\delta^2}{ab\gamma}\left[\frac{a}{b\sin\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+F(\varphi,k)-E(\varphi,k)\right] \tag{3.2.31}$$

其中，$a=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)c-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)d,c=\alpha-l_1-\frac{s_1}{k_1},k_1=A\pm\sqrt{A^2+1},A=\frac{s_1^2(\alpha-l_1)(\beta-l_1)}{s_1(\alpha-\beta)},b=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)d-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)c,d=\alpha-l_1+s_1k_1,k^2=\frac{1}{1+k_1^2},\delta=ad-bc=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(c^2-d^2),\frac{\delta}{\lambda}=\frac{-2kk_1}{\sqrt{-2s_1k_1(\alpha-\beta)}},\gamma=[(\alpha-l_1)^2+s_1^2]\sqrt{(c^2-d^2)[(\beta-l_1)^2+s_1^2]}$.

情形7：$D_4>0,D_2D_3\leqslant 0,F(f)$ 有两对共轭复根，即 $F(f)=[(f-l_1)^2+s_1^2][(f-l_2)^2+s_2{}^2]$，其中 l_1,l_2,s_1,s_2 是实数，$s_1\geqslant s_2>0$. $d_3>0$ 时，方程(3.2.18)的解为

$$\pm\sqrt{\frac{d_3}{2}}(\xi-\xi_0)=\frac{c\delta}{a\gamma}F(\varphi,k)+\frac{\delta^2}{ab\gamma}\left[\frac{b^2}{a^2+b^2}F(\varphi,k)+\frac{a^2}{a^2+b^2}\prod\left(\varphi,-1-\frac{a^2}{b^2},k\right)-\frac{ab}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2-b^2k^2)}}\ln\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(1-k^2\sin^2\varphi)}+\sqrt{a^2+b^2-k^2b^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)(1-k^2\sin^2\varphi)}-\sqrt{a^2+b^2-k^2b^2}}\right] \tag{3.2.32}$$

其中，$k^2=\frac{k_1^2-1}{k_1^2}$，$k_1=A+\sqrt{A^2-1}$，$A=\frac{(l_1-l_2)^2+s_1^2+s_2^2}{2s_1s_2}$，$a=l_1c+s_1d,c=-s_1+\frac{1}{k_1}s_2,b=-s_1c+l_1d,d=l_1-l_2,\delta=ad-bc=s_1(c^2+d^2),\gamma=s_1s_2\sqrt{(c^2+d^2)(k_1^2c^2+d^2)}$.

至此，方程(3.2.18)和方程(3.2.19)的解为式(3.2.20)～式(3.2.32). 再将求得的 f 代入条件(3.2.17)下的式(3.2.16)中

$$u(\xi)=b_2f^2\pm c_0\sqrt{\frac{d_3}{2}f^4+a_2f^2-\frac{d_1}{2}}$$

即可得到广义 KPP 方程的精确行波解. 例如，将式(3.2.20)代入上式得到

$$u(\xi)=\left(\frac{2\delta}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\xi-\xi_0)^{-1}\pm\sqrt{\left(\frac{2\delta}{k^2}\right)^{-1}(\xi-\xi_0)^{-2}+\frac{2k^2a_2}{\delta}\left(\frac{2\delta}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\xi-\xi_0)^{-1}-\frac{\rho}{2k^2}}$$

其他解可以类似得到，这里略.



参考文献

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A. Soliton, Nonlinear Evolution Equation and Inverse Scattering [M]. Cambridge Univ. Press, 1991.

[2] 谷超豪. 孤立子理论及其应用[M]. 浙江科技出版社, 1990.

[3] 李翊神. 规范变换,贝克隆变换与非线性叠加公式[J]. 数学进展, 1989(18): 356 - 372.

[4] Hu X B. Nonlinear superposition formulae for the differential-difference analogue of the KdV equation and two-dimensional Toda equation [J]. J. Phys. A: Math. Gen., 1994(27): 201 - 204.

[5] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子中的 Darboux 变换及其几何应用[M]. 上海科技出版社, 1999.

[6] Matveev V B, Salle M A. Darboux Transformations and Solitons[M]. Berlin: Springer, 1991.

[7] Estabrook F B, Wahlquist H D. Prolongation Structures of Nonlinear Evolution Equations, II [J]. J. Math. Phys., 1976(17): 1293 - 1297.

[8] Zhang D G. Integrability of fermionic extensions of the Burgers equation[J]. Phys. Lett. A, 1996,223(6): 436 - 438.

[9] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. J. Math. Phys., 1983(24):522 - 526.

[10] Hereman W, Takaoka M. Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA[J]. J. Phys. A: Math. Gen., 1990, 23(21): 4805 - 4822.

[11] Olver P J. Applications of Lie Group to Differential Equation[M], New York: Springer, 1986.

[12] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. Berlin: Springer, 1989.

[13] Parkes E J, Duffy B R. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations[J]. Computer Phys. Commun., 1996, 98(3): 288 - 300.

[14] Duffy B R, Parkes E J. Travelling solitary wave solutions to a seventh-order generalized KdV equation[J]. Phys. Lett. A, 1996(214):271 - 272.

[15] Parkes E J, Duffy B R. Travelling solitary wave solutions to a compound KdV-Burgers equation[J]. Phys. Lett. A, 1997(229):217 - 220.

[16] Li Z B. Exact Solitary Wave Solitons of Nonlinear Evolution Equations, In: Mathematics Mechanization and Application, Eds [M]// Gao X S, Wang D M. England: Academic Press, 2000.

[17] Lou S Y, Huang G, Ruan Y H. Exact solitary waves in a convecting fluid[J]. J. Phys. A, 1991, 24(11): L584 - L590.

[18] Malfliet W. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations[J]. Am. J. Phys., 1992,60

(7): 650 -654.

[19] Parkes E J. Exact solutions to the two-dimensional Korteweg-de Vries-Burgers equation[J]. J. Phys. A : Math. Gen., 1994(27): L497 - L501.

[20] Liu C S. Traveling Wave Solutions of Triple Sine-Gordon Equation[J]. Chin. Phys. Lett., 2004(21): 2369 -2371

[21] 刘成仕, 杜兴华. 耦合 Klein-Gordon-Schrodinger 方程新的精确解[J]. 物理学报, 2005, 54(3):1039 - 1043.

[22] Liu C S. Exact Traveling Wave Solutions for a Kind of Generalized Ginzburg-Landau Equation [J]. Commun. Theor. Phys., 2005, 43(5): 787 -790.

[23] Liu C S. All Single Traveling Wave Solutions to (3 + 1)-Dimensional Nizhnok-Novikov-Veselov Equation[J]. Commun. Theor. Phys., 2006, 45(6): 991 -992.

[24] Liu C S. Applications of complete discrimination system for polynomial for classifications of traveling wave silutions to nonlinear differential equations [J]. Computer Physics Communications, 2010(181): 317 -324.

[25] Liu C S. Classification of all single traveling wave solutions to Calogero-Focas equation[J]. Commun. Theor. Phys., 2007(48): 601 -604.

[26] Liu C S. Exact travelling wave solutions for (1 +1)-dimentional dispersive long wave equation [J]. Chin. Phys. Soc., 2005(14):1710 - 1716.

[27] 刘成仕. 用试探方程法求变系数非线性发展方程的精确解[J]. 物理学报, 2005(54): 4506 -4510.

[28] 刘成仕. 试探方程法及其在非线性发展方程中的应用[J]. 物理学报, 2005(54):2505 - 2509.

[29] Liu C S. Tial equation method to nonlinear evolution equations with rank inhomogeneous: Mathematical discussions and its applications [J]. Commun. Theor. Phys., 2006 (45): 219 -223.

[30] 杨路, 侯晓荣, 曾振炳. 多项式的完全判别系统[J]. 中国科学 E, 1996(39):424 -441.

[31] Maccari A. A generalized Hirota equation in 2 +1 dimensions[J]. J. Math. Phys., 1998 (39):6547 -6551.

[32] Hirota R. Exact envelope-soliton of a nonlinear wave equation[J]. Math. Phys., 1973(14): 805 -809.

[33] Fan E G. Uniformly constructing a series of explicit exact solutions to nonlinear equations in mathematical physics[J]. Chaos, Solitons and Fracatals, 2003(16): 819 -836.

[34] Liu C S. New exact envelope traveling wave solutions of high-order dispersive Cubic-Quintic nonlinear schrodinger equation[J]. Commun. Theor. Phys., 2005(44): 799 -801.

[35] Song L N, Zhang H Q. Extended sine-Gordon Equation Method and Its Application to Maccari's System[J]. Commun. Theor. Phys., 2005(44): 783 -788.

[36] Huang D J, Zhang H Q. Exact Travelling Wave Solutions to a Coupled Nonlinear Evolution Equation[J]. Commun. Theor. Phys., 2004(42): 171 -174.

[37] Zhang J L, Wang M L, Cheng D M, et al. The Peridic Wave Solutions for Two Nonlinear Evolution Equations[J]. Commun. Theor. Phys., 2003(40): 129 -132.

[38] Liu C S. Direct integral method, complete discrimination system for polynomial and applications to classifications of all single traveling wave solutions to nonlinear differential equations: A survey. arXiv:nlin/0609058.

[39] Kadomtsev B B, Petviashvili V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersive media [J]. Sov. Phys. Dokl., 1970(15):539 - 541.

[40] Lakshnaman M, Kalianppan P. Lie transformations, non-linear evolution equations and Painlevé forms[J]. J. Math. Phys., 1983(24):795 - 806.

[41] Zakharov V E, Kuznetsov V E. On three-dimensional solitons[J]. Sov. Phys., 1974(39): 285 - 288.

[42] Zheng C L, Chen L Q. A generalized mapping approach and new traveling wave solutions to (2+1)-dimensional Bousenisq equation[J]. Commun. Theor. Phys., 2004(41):671 - 674.

[43] Benjamin R T, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Philos. Trans. Roy. Soc., 1972(272):47 - 78.

[44] Wazwaz A M. The tanh and the sine-cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants[J]. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2006 (11):148 - 160.

[45] Gardner C, Greene J, ruskal M K, Miura R. Method for solving the Korteweg-deVries equation[J]. Phys. Rev. Lett., 1967(19): 1095 - 1097.

[46] Slyunaev A V, Pelinovski E N. Dynamics of large-amplitude solitons[J]. J. Exper. Theor. Phys., 1999(89):173 - 181.

[47] Rajaraman R. Solitons of coupled scalar field theories in two dimensions[J]. Phys. Rev. Lett., 1979(42):200 - 204.

[48] 王心宜, 赵南. 耦合标量场论中的新孤子解[J]. 物理学报, 1991(40):359 - 364.

[49] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性耦合标量场方程的精确解[J]. 物理学报, 1998(47):1064 - 1070.

[50] Cao D B. New exact solutions for a class of nonlinear coupled differential equations[J]. Phys. Lett. A, 2002(296): 27 - 33.

[51] 闫振亚, 张鸿庆. 非线性耦合标量场方程显示解析解的研究[J]. 应用数学和力学, 2001(22): 567 - 571.

[52] 李德生, 张鸿庆. 非线性耦合标量场方程的新双周期解(Ⅰ)[J]. 物理学报, 2003(52): 2373 - 2378.

[53] 李德生, 张鸿庆. 非线性耦合标量场方程的新双周期解(Ⅱ)[J]. 物理学报, 2003(52): 2379 - 2385.

[54] Feng Z S. Traveling solitary wave solutions to evolution equations with nonlinear terms of any order[J]. Chaos, Solitans and Fractals, 2003(17):861 - 868.

[55] Bogolubsky I L. Some examples of inelastic soliton interaction [J]. Computer Physics Communications, 1977(13): 149 - 155.

[56] Clarkson P A, Leveque R J, Saxton R, et al. Solitary-wave interactions in elastic rods[J]. Studise appl. Math. (Cambridge), Blackwell, 1986(75): 95 - 102.

[57] Ablowitz M J, Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform[M]. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1981.
[58] Wadati M. Wave Propagation in Nonlinear Lattice[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1975(38): 673 – 680.
[59] Bona J L, Schonbek M E. Traveling wave solutions to the Korteweg-de-Vries-Burgers equation [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Sect. A, Math., 1985(101): 207 – 226.
[60] Wang M L. Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation[J]. Phys. Lett. A, 1996 (213): 279 – 287.
[61] Du X H, Liu C S. New Exact Traveling Wave Solutions for Compound KdV-Type Equation with Nonlinear Terms of Any Order[J]. Commun. Theor. Phys., 2006(46): 787 – 792.
[62] 杜兴华. 用试探方程法求 Jaulent-Miodek 方程的新的精确行波解[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(6):204 – 208.
[63] Liu C S. The exact solutions to lienard equation with high-order nonlinear term and applications[J]. Fizika A, 2009(1):29 – 44.
[64] Seyler C E, Fenstermacher D L. A symmetric regularized-long-wave equation[J]. Phys. Fluids, 1984(27): 4 – 7.
[65] Yang Z J. Some exact solutions to the sine-Gordon equations[J]. Int. J. Theor. Phys., 1995 (34): 589 – 593.
[66] Du X H. A new trial equation method to find the exact traveling wave solutions to nonlinear differential equations (to submit).
[67] 杜兴华. 1 + 1 维 Camassa-Holm 方程的精确行波解[J]. 大庆石油学院学报, 2006, 30 (6): 96 – 98.
[68] Bona J L, Priitchard W G, Scott L R. An model Equation for Water Waves[J]. Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1981, 302(1471): 457 – 510.
[69] Amick C J, Bona J L, Schonbek M E. Decay of some Nonlinear Wave Equations[J]. J. Diff. Eqs., 1989, 81(1): 1 – 49.
[70] Zhang Weiguo, Wang Mingliang. A Class of Exact Traveling wave solutions and their structure for the B – BBM equation[J]. Acta mathematica scientia. 1992, 12(3): 325 – 331.
[71] Tan J Y. A class of analytic solution for RLM-Burgers equation[J]. Mathematics in practice and theory. 2001, 9(5): 545 – 549.
[72] Wang M L. Exact solutions for the RLM-Burgers equation[J], Methematica Application. 1995, 8(1): 51 – 55.
[73] 杜兴华. 2 + 1 维 Bousenisq 方程的精确行波解[J]. 大庆石油学院学报, 2007, 31(1): 118 – 119.
[74] 杜兴华. 非线性耦合标量场方程新的精确行波解[J]. 数学的实践与认识, 2007(6): 153 – 159.
[75] Ablowitz M J. Lectures on the inverse scattering transform [J]. Studies in Applied Mathematics, 1978, 58(11): 17 – 94.
[76] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves[M]. New York: John Wiley, 1974.

[77] Liu C S. New trial equation methods and exact solutions to some nonlinear mathematics physical equations[J]. Far East Journal of Applied Mathematics, 2010, 40 (1): 49 -64.

[78] Zhang J F, Meng J P. (2 + 1)-Dimensional combined structures of variation solitions with completely nonelastic interaction properties[J]. Commun. Theor. Phys., 2004, 41 (5): 655 -664.

[79] Wazwaz A M. The tanh method: solitons and periodic solutions for the Dodd-Bullough-Mikhailov and the Tzitzeica-Dodd-Bullough equations [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25(1): 55 -63.

[80] Sawada K, Kotera T. A method for finding N-soliton solutions of the K. d. V. equation and the K. d. V. -like equation[J]. Progr. Theoret. Phys., 1974(51):1355 -1367.

[81] Jaulent M, Miodek. Nonlinear evolutions associated with enengy dependent Schrodinger potentials[J]. Lett. Math. Phys., 1976(1): 43 -50.

[82] Matsuna Y. Reduction of dispersionless coupled KdV equations to the Euler-Darboux eqution [J]. Math. Phys., 2001(42): 1744 -1760.

[83] Zeng Y B. Separability and dynamical r-matrix for the constrained flows of the Jaulent-Miodek hiodek hierarchy[J]. Phys. Lett. A, 1996(216): 26 -32.

[84] Zhou R G. Lax representation, r-matrix method and separation of variables for the Neumann-type restricted flow[J]. Math. Phys., 1998(39): 2848 -2858.

[85] Ruan H Y, Lou S Y. New symmetries of the Jaulent-Miodek hierarchy[J]. Phys. Soc., 1993(62): 1917 -1921.

[86] Fan E G. Uniformly constructing a series of explicit exact solutions to nonlinear equations mathematical physics[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003(16): 819 -839.

[87] Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media[J]. J. Phys. Soc. Japan, 1972 (33): 260 -264.

[88] Jiang Z. Construction of scattering data for a class of multidimensional scattering operators [J]. Inverse Probl., 1989(5):349 -374.

[89] Ito M. An Extension of Nonlinear Evolution Equations of the K-dV (mK-dV) Type to Higher Orders[J]. J. Phys. Soc. Jpn., 1980(49):771 -778.

[90] Wazwaz A M. Exact solutions for the fourth order nonlinear Schrodinger equations with a cubic and a power law nonlinearities[J]. Math. Comput. Modelling, 2006(43): 802 -808.

[91] Ma W X, Fuchssteiner B. Explicit and exact solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation[J]. Int. J. Non-linear. Mech., 31(1996), 329 -338.

[92] Gudkov V V. A family of exact travelling wave solutions to nonlinear evolution and wave equations[J]. J. Math. Phys., 1997(38): 4794 -4803.

[93] Du X H. Classification of all single traveling wave solutions to (2 + 1)-dimensional general generalized Hirota equation [J]. Advances and Applications Methematical Sciences, to appear.

[94] Du X H. Some notes on projective Riccati equation method[J]. Fizika A, 2009, 18(4): 153 -164.

[95] Conte R, Musette M. Link between solitary waves and projective Riccati equations[J]. Phys.

A, 1992(25): 5609 – 5623.

[96] Bountis T C, Papageorgiou V, Winternitz P, et al. On the integrability and perturbations of systems of Ode's with nonlinear superposition principles[J]. Physica D: 1986(18): 211 – 212.

[97] Yan Z Y. Generalized method and its application in the higher-order nonlinear schordinger equation in nolinear optical fibres[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 16(5): 759 – 766.

[98] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S, et al. Exact solitary wave solutions of nonlinear wave equations[J]. Science in China (Series A), 2000, 30(12):1103 – 1108.

[99] Xie F D, Chen J, Lü Z S, et al. Using Symbolic Computation to Exactly Solve the Integrable Broer-Kaup Equations in (2 + 1)-Dimensional Spaces[J]. Commun. Theor. Phys., 2005, 43(4): 585 – 590.

[100] Emmaunuel Yomba. The general projective Riccati equations method and exact solutions for a class of nonlinear partial differetial equations[J]. Chinese Journal of Physics, 2005, 43 (6): 991 – 1003.

[101] Chen Y, Li B. General projective Riccati equation method and exact solutions for generalized KdV-type and KdV-Bergers-type equations with nonlinear terms of any order[J]. Chaos, solitons and Fractals, 2004, 19(4): 977 – 984.

[102] Mei J Q, Zhang H Q. New types of exact solutions for a breaking soliton equation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 20(4): 771 – 777.

[103] 杜兴华. Maccari's 方程组新的精确行波解. 数学的实践与认识, 2010(待发表).

[104] Feng X. Exploratory Approach to Explicit Solution of Nonlinear Evolution Equations[J]. Int. J. Theor. Phys., 2000,39(1): 207 – 222.

[105] Lakshmanan M, Kaliappan P. Lie transformations, nonlinear evolutions, and Painleve forms [J]. J. Math. Phys., 1983, 24(4): 795 – 806.

[106] Bluman G W, Cole J D. The general similarity solution of the heat equation[J]. J. Math. Mech., 1969(18): 1025 – 1042.

[107] Farlow S J. Partial Differential Equation for Scientists and Engineers[M]. Canada: Wiley Interscience, 1982.

[108] Du X H. An irrational trial equation method and its applications. Pramana-Journal of Physics (to appear).

[109] Du X H. New exact traveling wave solutions to the fourth-order nonlinear Schrodinger equation with power law nonlinearity (to submit).

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝非线性数学物理方程的精确解
作者＝杜兴华著
页数＝９０
出版社＝哈尔滨市：哈尔滨工程大学出版社
出版日期＝２０１０
ＳＳ号＝１２７１３９０９
ＤＸ号＝０００００６９７２５６３
ＵＲＬ＝ｈｔｔｐ：／／ｂｏｏｋ．ｓｚｄｎｅｔ．ｏｒｇ．ｃｎ／ｂｏｏｋＤｅｔａｉｌ．ｊｓｐ？ｄｘＮｕｍｂｅｒ＝０００００６９７２５６３＆ｄ＝Ｃ１ＥＥ８６Ｆ０７Ｃ７８３７ＢＡ７９４３ＣＤ４１５５０４３５ＣＣ